

Mathematische Anschauungs **materialien** → GUT oder SCHLECHT ?



Immer wieder werden wir gefragt, was wir von den diversen eingesetzten Lehrmitteln halten, ob sie eher gut, bedenklich oder gar gefährlich sein können für das erwünschte richtige Verständnis der damit transportierten mathematischen Gedanken. Unsere absichtlich vorerst sehr allgemeine, aber deshalb um nichts weniger richtige Antwort lautet: Fast nie sind die "Veranschaulichungsmittel" dafür verantwortlich zu machen, welche falschen Gedanken mit ihnen auch transportiert, "erklärt", verfestigt, jedenfalls nicht entdeckt werden.

Begründung: Man spricht von "Anschauungsmitteln", mithin von Illustrationen eines mathematischen Gedankens. Etwas Gedachtes, abstrakt Allgemeines soll über Angebote an das Vorstellungsvermögen besser verankert werden, zur bezweckten richtigen Denkroutine verhelfen. Die oben zitierte so häufig gestellte Frage ist in gewisser Hinsicht unbescheiden. Denn einerseits handelt es sich, wie der Name schon sagt, um Mittel der Anschauung (für was?), gleichzeitig sollen sie möglichst für die Richtigkeit oder Falschheit eben eines Gedankens bürgen, was die Bestimmung einer Veranschaulichung verlässt, indem es unter den Verdacht gesetzt wird, in der Lage zu sein, selbst (falsche) Gedanken zu initiieren.

Dass Veranschaulichungsmittel falsche Gedanken verhindern sollen und richtige garantieren, ist zu viel verlangt.

Die obige allgemeine Antwort noch etwas näher – und jetzt aus der Perspektive rechenschwacher Kinder – betrachtet:

Im Grunde führt die Bezeichnung „Anschauungs-Material“ bereits in die Irre; weitaus treffender wäre es, von „**Erarbeitungs-Material**“ zu sprechen. Denn es geht nicht einfach um die „Anschauung“ im Sinne von: etwas anschauen, sehen können. Sondern ein rechenschwaches Kind soll einen mathematischen Sachverhalt begreifen, dessen mathematische Struktur durchschauen. Dieses Begreifen, Durchschauen muss durch geistige Arbeit errungen werden. Dafür ist das Selber-Hantieren, die manuelle Arbeit mit dem richtigen Material freilich eine wichtige Hilfe. Aber: **Auch das beste Material sorgt nicht von selbst dafür, dass das Kind die richtige mathematische Einsicht entwickelt.**

Gerade rechenschwache Kinder neigen umgekehrt dazu, jegliches Material erst einmal im Sinne ihrer bereits vorhandenen Fehlvorstellungen zu verstehen – oder, wo das nicht funktioniert, gänzlich abzulehnen. Ihre falschen mathematischen Konzepte werden durch das „richtige“ Material also nicht automatisch korrigiert. Sondern das Kind wird, auf sich alleine gestellt, **umgekehrt das Material in den Dienst seiner falschen Konzepte stellen.**

So „missbraucht“ es dann beispielsweise ein als Mengen-Darstellung gedachtes Rechenbrett als bloße Zähl-Hilfe, ohne dabei den Mengen-Aspekt der Zahl in der gewünschten Weise zu erfassen.

So wichtig es also ist, dass das rechenschwache Kind selbst mit dem Material hantieren kann, so unerlässlich ist es, dass sein Materialeinsatz gesteuert wird.

Gesteuert von einer Person, die mit den kindlichen Denkweisen, den möglichen Missverständnissen auf jeder Ebene ebenso vertraut ist wie mit der Systematik der mathematischen Schritte, die es zu erarbeiten gilt.

Ziel des Material-Einsatzes muss es sein, das Material überflüssig zu machen. Das Erarbeitungs-Material sollte eine Leiter sein, auf der das Kind zum Verständnis einer mathematischen Struktur, einer Operation gelangt – und die es, sobald es dort angelangt ist, wieder wegwirft.

Rechenschwachen Kindern fällt es oft schwer, Handlungen innerlich nachzuvollziehen. Das Kind muss also immer wieder dazu angehalten und ermutigt werden, das mittels Material bereits erarbeitete **Verständnis** nun auch ohne Materialeinsatz **bis an seine Grenzen auszureizen.**

Dieses „Wegwerfen des Materials“ gelingt aber in der Regel nur dann, wenn es in der Arbeit mit dem rechenschwachen Kind beständig ganz gezielt angesteuert wird. Denn sobald man ihm das Material entzieht, ist es dann doch wieder ratlos, weil es die vielleicht schon dutzendfach selbst ausgeführte Handlung dennoch ohne Hilfe nicht innerlich nachvollziehen kann.

Gleichförmige Wiederholung des Materialeinsatzes ist jedoch nicht die Lösung. Sondern es muss ermutigt und – durch Anregungen, Strukturierungshilfen, durch gezielte Erinnerung an das soeben Durchgeführte – auch befähigt werden, **zumindest Teile der mathematischen Handlung nun auch im Geist, in der Vorstellung zu vollziehen.**

Als wichtiger Zwischenschritt dafür hat sich der **verdeckte Einsatz von Material** erwiesen:

Das Material wird nach einer ersten Erarbeitungsphase unter einem Tuch, einer Schüssel, hinter einer Trennwand ... der unmittelbaren Anschauung entzogen. Das Kind kann in einer bestimmten Phase – zum Beispiel unter dem Tuch – vielleicht noch mit dem Material hantieren, kann es aber nicht mehr sehen. So wird einerseits seine Vorstellung gefordert, andererseits aber auch gefördert: Die konkrete Erinnerung „Unter dem Tuch ist das, womit ich gerade noch selbst gearbeitet habe!“ erleichtert den geistigen Nachvollzug entscheidend.

Immer wieder begegnet man Bedenken, ob **Materialwechsel** für rechenschwache Kinder nicht per se verwirrend sei. Sicherlich wird ein rechenschwaches Kind auch bei optimaler Förderung zumeist längere Phasen benötigen, in denen es unter Anleitung mit dem Material hantieren kann. Trotzdem ist es erforderlich, das Material zu wechseln, um die nicht zu unterschätzende Gefahr falscher Identifikation eines Vorgangs mit einem bestimmten Material zu vermeiden. Schließlich soll Material als Beispiel für einen Vorgang dienen und nicht als dieser selbst verstanden werden.

Material für die Erarbeitung einer richtigen Zahlvorstellung im Zahlenraum bis 10

Ausgangsproblem:

Rechenschwache Kinder verstehen Zahlen zumeist nicht oder nicht in erster Linie als Menge (Quantum, Anzahl, Wie viel?). Sondern gewissermaßen als Punkt in einer Reihe, als eine Station in einer auswendig gelernten Kette von Zahlennamen. „Sieben“ beispielsweise wird nicht als Gesamtheit von sieben Einern aufgefasst, sondern als der siebente, das eine Ding (Würfel, Finger ...), auf welches der Finger beim Aufsagen der Abzähl-Reihe zuletzt getippt hat.

Der Material-Einsatz muss also darauf abzielen, diese auf den Reihenfolge-Gedanken („Ordinal-Aspekt“) der Zahl eingeschränkte Sicht zu korrigieren. Das verlangt ein striktes Wegführen des Kindes vom rein zählenden hin zum Mengen erfassenden, Mengen vergleichenden und Mengen strukturierenden Zahlen-Umgang. Nun lässt sich aber so gut wie jedes Material auch rein zählend gebrauchen. Eben deshalb hängt gerade bei der Erarbeitung des richtigen Zahlverständnisses alles von der Art und Weise ab, wie das Material verwendet wird. Freilich gibt es auch dafür mehr oder weniger gut geeignete Materialien.

Die Materialien im Einzelnen →

1. Finger als Zählmaschine

versus Finger als Mengen-Gliederungs-Hilfe

„Finger beim Rechnen“ das wird allzu häufig verboten. Auch Lehrer, die vielleicht selbst eine unverkrampfte Haltung dazu einnehmen, müssen bedenken, dass viele Eltern, Großeltern, bei Hausübungen helfende Verwandte... ab einem gewissen Alter „Finger-Verbote“ aussprechen - in der irrigen Annahme, schon alleine dadurch dem Kind zum anschauungs-ungebundenen Kopfrechnen zu verhelfen.

Ein „Verbot“ des Zählens ist aber keine Lösung, im Gegenteil: es macht die Situation für das Kind nur noch schlimmer: Ein Kind mit einer wie oben falschen Zahlvorstellung kann nur durch Zählen zu einer Lösung finden - egal, wie einfach die Aufgabe ist. Verbietet man ihm nun eine Zähl-Hilfe (Finger, Würfel, Knöpfe, Bleistifte ...), dann führt das nur entweder zu Heimlichkeiten (Finger unter dem Tisch, unter dem Popo, nur leichtes „Finger-Drücken“ an der Wange...), Oder aber dazu, dass das Kind nun tatsächlich ohne Zähl-Hilfe dennoch zu zählen versucht. Es wird dann - zumeist mit allen äußeren Zeichen größter Anspannung (Augen fest zugekniffen, den Kopf im Zähl-Takt mitbewegend ...) - im Kopf die Zahlenreihe Schritt für Schritt rauf- oder runterhüpfen. Das ist eine gewaltige Anstrengung von Wille und Konzentration - aber mathematisch um nichts wertvoller als das ungleich leichtere und auch weniger fehleranfällige Abzählen an Fingern oder Würfeln oder sonstigen Zähl-Hilfen.

Das Problem bei jedwedem Zählen - ob mit oder ohne Finger - besteht darin, dass die Zahl nicht als Menge, nicht in ihrer Größe, ihrem „Wieviel?“ genommen wird. Das Zählen ist also nur die Folgeerscheinung des dahintersteckenden eigentlichen Problems namens **„falsche Zahlenvorstellung“**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3 + 4 = ?$								
Vom Standpunkt eines rein ordinalen Zahlenverständnisses (Zahl als Station, nicht als Menge gedacht) könnte „3+4“ ebenso gut „2“ ergeben - nämlich, „2 Stationen“								

Das dauerhafte Zählen-Dürfen hilft dem Kind allerdings auch nicht: Also gilt es, dem Kind alternative, mengenbezogene Weisen der Zahlverknüpfung zu eröffnen. Und gerade dafür sind, richtig verwendet, die Finger wiederum sehr brauchbar. Eine Drei ist darzustellen, indem eine Hand drei ausgestreckte Finger der anderen Hand umkreist, statt auf den dritten Finger derselben zu deuten. Eine Drei können beliebige Finger einer Hand darstellen (z.B. Daumen, Mittelfinger, kleiner Finger), ebenso zwei Finger der einen und ein Finger der anderen Hand. In der Darstellung der Acht können die beteiligten Hände ihre Funktion tauschen. Das Kommunitativ-Gesetz kann unmittelbar einsichtig gemacht werden. So ist jedenfalls genauso vermieden, dass der eine Daumen die Eins, der andere die Sechs repräsentiert wie die angebliche Eigenschaft des Ringfingers, die Vier zu sein. M. a. W. dass beim Finger-Rechnen sich letztlich gewisse Gewohnheiten einstellen, ist in Ordnung und etwas ganz anderes, als würde ein bestimmter Finger eine konkrete Zahl erst konstituieren.

(soweit hier grundsätzliches - in einer der Folgenummern wird auf das Fingerrechnen noch einmal ausführlich eingegangen.)

2. Die Kette mit den Kugeln:

„mehr Finger zum Zählen oder Aufbau einer erweiterten Zahlvorstellung“

Der dem richtigen Verständnis abträgliche Gebrauch der Kugeln wäre die Fortsetzung des Gesagten zum (falschen) Zählen mit Fingern. Gut zu verwenden ist die Kette jedoch für die zusätzlich praktikabel zu machende Einsicht, dass ich beliebige Zahlen, also Einerhaufen, in zwei, drei, vielleicht auch mehrere Einerhaufen zerteilen kann - und diese Verteilung durch Verschieben einzelner Einer beliebig variieren kann, ohne an der Gesamt-Anzahl der Einer etwas zu ändern.

Gut nach vollziehbar ist das Prinzip „hier eins mehr, dort eins weniger, insgesamt gleich viel wie zuvor“ durch die Verschiebung von Kugeln. Therapeutische Möglichkeit dafür: 3, 4, 5, ... bis 9 Holzkugeln auf je einer Schnur auffädeln. Daran mit dem Kind zunächst den oben beschriebenen Grundgedanken erarbeiten. Das Kind in der Folge verschiedene Zerlegungen einer Zahl selbst an der Kugeltaste durchführen und jeweils notieren lassen. Im nächsten Schritt wieder der Versuch, das Material durch Vorstellung zu ersetzen: Ausgangspunkt ist z.B. die „Handzerlegung“ der 8 in $5 + 3$. Diese wird an der 8er-Kette gelegt. Dann die Kette mit Tuch verdeckt, Kind verschiebt unter dem Tuch eine Kugel von der 3er-Seite zur 5er-Seite - und soll nun (ohne unter dem Tuch zu zählen!) versuchen, die entstandene neue Zerlegung/Verteilung der 8 Kugeln anzugeben. Wenn ein Kind mit Defiziten in der Verinnerlichung hier Probleme hat, nicht einfach die Kette wieder aufdecken, sondern konkrete Denk-Anstöße geben: „Überlege zunächst nur, was auf dieser Seite passiert ist.“ „Hast du hier eine Kugel dazu geschoben?“ „Oder von hier eine Kugel weg geschoben?“ „Ist es hier mehr als vorher oder weniger als vorher?“

Die pädagogische Kunst wäre wieder, so wenig von diesen Anregungen wie möglich, so viele wie nötig zu geben.

3. Steck-Würfel „der Würfel als bloße Zahlhilfe“

Wiederum wesentlich ist die Verwendung der Würfel: Als bloße Zählhilfe sind ihre vorteilhaften Eigenschaften verschenkt. Für das Erarbeiten eines Grundverständnisses mathematischer Operationen (Addieren als Dazugeben, Zusammenfügen, Subtrahieren als Wegnehmen, Unterschieds-Bestimmen ...), das Anstellen von Mengenvergleichen und vieles mehr haben sich die Steckwürfel wegen ihrer vielfältigen Einsatzmöglichkeiten auch für weitere Schritte (etwa beim transparent machen des Zehner-/Bündels-/entbündeln, beim Ein-mal-Eins, Umkehraufgaben, Platzhalteraufgaben) sehr bewährt: Sie erlauben farbliche Differenzierung, die Möglichkeit des Zusammen- und wieder Auseinandersteckens

lässt sich vielfach verständnisfördernd einsetzen, sie sind Kindern wegen ihrer Eignung zum Basteln in der Regel sympathischer als simple Klötzchen, Knöpfe, Plättchen. (Ein Nachteil besteht sicherlich in der schweren Handhabbarkeit für Kinder mit Defiziten in der Feinmotorik; man kann hier nur an die Produzenten appellieren, leichter steckbare, zudem auch etwas größere als die erhältlichen (Kantenlänge ca. 1,5 cm) herzustellen.

Ein Beispiel dafür vom Abzählen loszukommen: Das Kind weiß $3 + 3$ auswendig, $3 + 4$ muss bisher durch Abzählen gelöst werden. Hier empfiehlt es sich, beide Aufgaben mit Steck-Würfeln legen zu lassen, endlich einmal aber nicht nach dem „Wieviel?“ zu fragen, sondern: „Vergleiche die Aufgaben. Wo sind insgesamt mehr Würfel?“ Die Frage befreit vom Druck,

immer gleich ein „Ergebnis“ wissen zu müssen und lädt zum Nachdenken ein: Auf beiden Seiten sind zuerst 3, dann kommen hier 3 dazu, da aber 4, also mehr, dann müssen es auch insgesamt mehr als die gewusste 6 sein. In Analogie $4 + 4$, dann $3 + 4$: Eher mehr oder weniger? Also weniger als 8. Wenn es aber mehr als 6 und weniger als 8 sein müssen, was bietet sich da an (was käme da alles in Frage?) In ähnlicher Weise lassen sich sämtliche Grundaufgaben im Zahlenraum 10 erarbeiten.

4. Cuisenaire - Stäbchen „das rote Klötzchen ist die Zwei“

Damit ist der Hauptnachteil angesprochen. Die Eigenschaften rot, viereckig, aus Holz einer bestimmten Länge zu sein verwachsen derart mit der - relativen und zugeordneten - Bestimmung, Zwei darzustellen, dass beide Ebenen im Kinderbewusstsein verschmelzen. Dass die Eins frei festlegbar ist, dass „Zwei“ darzustellen von dem Bezug auf eine Eins abhängt, und mit diesem Bezug steht und fällt, liegt jenseits aller Gedankenwelt bei der Betrachtung. Außerdem sind diese Holzstücke nicht teilbar, Größen also nur nebeneinander vergleichbar, nicht veränderbar. Und die jeweilige Farbe mag andauernde Abzählverse verhindern, aber nur weil man direkt eine bestimmte Farbe mit einem Zahlennamen gleichsetzt. Schätzenswert ist sicherlich, dass immer die gesamte Größe ins Auge fällt, nicht ein Punkt, ein Ort o. a. falsche Zahlvorstellungen.

Die Hoffnung, das Kind werde schon irgendwann von alleine auf das Zählen verzichten, erweist sich im Fall einer Rechenschwäche leider immer als illusorisch.