Offenbarungseid Algebra
Wenn wirklich nichts mehr geht!

Nichts „hassen“ Schüler in der Mathematik mehr, als wenn es um Allgemeingültigkeiten oder Beweise geht. Und dies gilt in ganz besonderer Weise für rechenschwache Kinder und Jugendliche. Schon im Bereich des numerischen Rechnens in größten Nöten, sehnen sie sich angesichts des undurchdringlichen Buchstaben“salats“, der ihnen da an der Tafel angeboten wird, doch tatsächlich in die „alte Welt“ des Rechnens zurück. Da ging zumindest noch etwas mit auswendig gelernten Algorithmen, Schemata oder mit Abzählen an den Fingern.

Um möglichen Missverständnissen gleich im Voraus vorzubeugen: Hier ist nicht von SchülerInnen die Rede, die aufgrund der Umstellung ihres Hormonhaushaltes gelegentlich auch eine andere Einstellung zur Schule entwickeln und ihren „Fleiß“ u. a. auf das Sammeln schlechter Zensuren richten. Wir möchten hier auf Kinder/Jugendliche aufmerksam machen, die wegen einer nicht erkannten Rechenschwäche während der Grundschulzeit auf der weiterführenden Schule versagen müssen, und zwar trotz allem guten Willen und viel Übung:

„Da bereits nach der ersten Arbeit klar war, dass ich ohne Hilfe diese Schule (Gymnasium) nicht überleben würde, verschliss ich in den folgenden Jahren einige Nachhilfen, ohne auch nur irgendeinen Erfolg zu verbuchen. In der Zwischenzeit war ich im übrigen auf einer Beton-6.“
(Lena, heute 13. Klasse Gymnasium)

„Das muss man doch in der Grundschule schon sehen!“

Da sprechen unsere Erfahrungen eine ganz andere Sprache. Gerade lernstarke rechenschwache Kinder schaffen es (wenn auch mit einem erheblichen Aufwand an Übung) mit passablen Noten durch die ersten Klassen, und dies in vielen Fällen trotz gravierender Defizite im Bereich der Grundrechenarten, wie das Beispiel einer betroffenen Mutter zeigt:

„Ich bin verunsichert und wüsste gern, ob meine Tochter eventuell rechenschwach ist. Meine Tochter ist 11 Jahre und ist gerade aufs Gymnasium gewechselt. Ihr Notendurchschnitt lag in der Grundschule bei 2, in Mathe hatte sie zuletzt eine 3.
*Sie versucht immer, das Schema zu erkennen und wendet ein gelerntes Schema blind an. In der Grundschule lag die **Trefferquote extrem hoch**. Bei Kopfrechenaufgaben vergisst sie häufiger die Aufgabenstellung. Sie hat Probleme, ein "Schlüssel-Schloss-System" anzuwenden, so was wie 24 + 16, 3+17 etc. Ich habe versucht, dass sie es auswendig lernt, also 1+9, 2+8, 3+7 etc. und umgekehrt, aber sie begreift das System nicht.“*

Und das sind keine Einzelfälle: Nahezu alle Gymnasial-SchülerInnen, die uns aus höheren Klassen vorgestellt werden, haben am Ende ihrer Grundschulzeit ein Befriedigend auf dem Zeugnis. Unerkannt bleiben die strukturellen Probleme dieser Kinder, weil

1. häufig nur auf die Note geschaut wird; und wenn die anderen Fächer „stimmen“, ist man eben auch mit einem Befriedigend noch gut bedient. „Man kann ja nicht überall sehr gut sein!“ „In Mathe war ich auch immer schlecht!“

2. immer nur richtige Ergebnisse eine Rolle spielen; dann zeugt dies ja wohl auch davon, dass der sachliche Inhalt auch verstanden wurde – ein fataler Irrtum!

Kann man nahezu jedem Drittklässler beibringen

$$\int 7x^3 - 2x^2\,dx =$$

“Die Schlange vorne und das dx fällt weg; auch die kleinen Zahlen da oben schreibt ihr erst einmal nicht auf. Den Rest müßt ihr hinschreiben!”

$$7x - 2x$$

“Jetzt rechnet zu der kleinen Zahl einen dazu. Das gibt dann die neue kleine Zahl über dem x.”

$$7x^4 - 2x^3$$

“Beim nächsten Schritt braucht ihr nicht einmal zu rechnen: Macht einfach einen Strich unter die Sachen, die minus-gerechnet werden!”

$$\underline{7x^4} - \underline{2x^3}$$

“Auch jetzt wird es nicht schwer: Die neue kleine Zahl über dem x schreibt ihr bitte unter den Strich.”

$$\frac{7x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

“Zum Schluß dürft ihr eines nie vergessen: Bei allen Aufgaben schreibt ihr hinten + c dran. Dann seid ihr fertig.”

$$\frac{7x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + c$$

3. es den Kindern gerade wegen ihrer allseits geschätzten Lernstärke gelingt, sich mit völligem Unverständnis durch die Grundschulmathematik durchzuhangeln, indem sie ganze Verfahrensweisen auswendig lernen und rein schematisch reproduzieren (z. B. schriftliche Rechenarten). Natürlich bleibt es dabei nicht aus, dass es auch zu gravierenden Fehlleistungen, unsinnigen Algorithmen etc. kommt, die dann häufig als „Black-Outs“, „Unkonzentriertheit fehlinterpretiert werden:

Nr. 1,3 − 104,6 − 11 = 897,3 f f ||

Nr 2 $417 = 104 \cdot 4 + 0$ f

$104 = \;? \cdot 4 +$

(…, deine Arbeit lässt vermuten, dass du einen ziemlichen „Black-Out“ hattest und dich an das Meiste nicht mehr erinnern kannst. Wiederhole vor allem die Rechengesetze!

Hat mit “Black-Outs” nichts zu tun. Eher ein völliges Unverständnis, was die Subtraktion und das Distributivgesetz angeht.

(Klausur von Carmen, damals in Klasse 6 Gymnasium)

Und so findet sich das Kind schließlich nach einer Empfehlung der Grundschule auf dem Gymnasium oder in der Realschule wieder. Und eines sei hier deutlich gesagt: Nahezu alle diese Empfehlungen seitens der Grundschulen sind aus unseren Erfahrungen heraus korrekt gewesen, und zwar wegen der durchaus richtig eingeschätzten Lernstärke des Kindes – nur Mathe wird von nun an zu einem schier unüberwindbaren Problem.

Die Katastrophe nimmt ihren Lauf

„Die Situation war schon sehr belastend, aber Carmen schaffte jede Versetzung, wohl mit Mathe fünf und kam in die 8. Nach der 2. Mathearbeit – wieder 5 – sprach ich mit dem Lehrer und er sagte: „Ich weiß nicht, was es ist; sie fängt ordentlich an, baut aber nach kurzer Zeit total ab und dann läuft nichts mehr.“

(Carmens Mutter)

Überwiegend stürzen rechenschwache Gymnasial-Kinder bereits in der fünften Klasse ab. Dieser Zeitpunkt kann sich verschieben, wenn Nachhilfe, noch mehr Paukerei und Übung die Kinder vor einem Mangelhaft oder Ungenügend retten. Wirklich verstanden wurde und wird rein gar nichts mehr und das Fach Mathematik entwickelt sich zur allseitigen Qual:

„Hatten wir erst mit der eigentlichen Rechnung begonnen, plagte sie mich u.a. mit Vorzeichenfehlern, Rechenfehlern und Verstößen gegen Punkt- vor Strichrechnung. Eigentlich hatte ich den Eindruck, dass meine Schwester, was Mathe angeht, bekloppt und gänzlich unintelligent ist und mich nach Strich und Faden verarscht. Es war mir unbegreiflich, wie man so schwer von Begriff sein konnte. Ich hatte deshalb wenig Verständnis und eine Menge Ungeduld, was, kombiniert mit einer verwirrten und verzweifelten Schwester, zu heftigen Streitereien führte.“
(Sandras – heute Klasse 13 Gymnasium – Schwester über das Üben zu Hause)

„Ich sah einfach keinen Zusammenhang oder Gemeinsamkeit zwischen allen Aufgaben, die ich rechnete, und verzweifelte an meiner Unfähigkeit.“
(Lena, Klasse 13 Gymnasium)

„Mein Mann hat seiner Tochter nur selten helfen können. Später habe ich es bewusst vermieden, da es immer in Chaos endete, die Aufgaben waren nicht fertig, das Kind war fix und fertig, er war sauer und am Schimpfen in einem Ton, den ich für Carmen als zu hart und beleidigend empfand: Wenn du zu blöd dazu bist, dann gehst du eben zur Hilfsschule, so blöd kann man sich doch nicht anstellen. Die weiß ja nicht einmal, was das und das ist...“
(Carmens Mutter)

Schlachtfeld Algebra - die Kapitulationserklärung

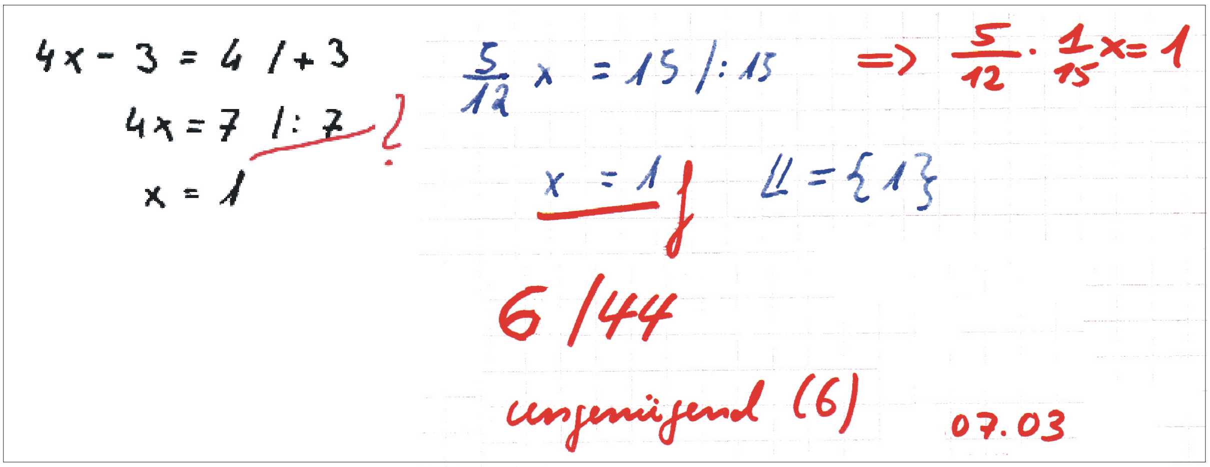
„Unsere Tochter versuchte sich durchzubeißen und ihre Defizite mit verstärkten Anstrengungen sowie Nachhilfeunterricht auszugleichen. Ihre Bemühungen blieben erfolglos, im Verlauf der 8. Klasse stand unter ihren Klassenarbeiten nahezu regelmäßig „Ungenügend“.
(Lenas Vater)

Und beim Thema Algebra ist dann mit Schemata, Auswendiglernen etc. endgültig Schluss, auch wenn der Taschenrechner noch über Probleme beim numerischen Rechnen, beim Rechnen mit Brüchen oder negativen Zahlen hinweghelfen mag:

„Ich war der Meinung, wenn man sich mit dem Rechnen schon schwer tut, kann man wenigstens die Dinge auswendig lernen, die sich auswendig lernen lassen. Meine Schwester war da anderer Ansicht.“
(Sandras Schwester)

Mit Buchstaben kann kein Taschenrechner etwas anfangen und schließlich rechnet das „Ding“ nun einmal nur das aus, was man ihm eingibt! Eine Gleichung bekommt man so nie und nimmer umgestellt, und auch mit dem Umformen algebraischer Terme ist das Teil völlig überfordert. Und so wird gerade beim Thema Algebra das offenbar, was bisher einigermaßen kompensiert werden konnte. Neben den Problemen beim numerischen Rechnen (Addition/Subtraktion im Zahlenraum bis 100, kleines und großes Einmaleins etc.), sorgen nun häufig nicht erkannte, in allen Fällen aber nicht behobene Defizite aus der Grundschulzeit für die unvermeidliche Katastrophe:

1. **Die Funktion des Gleichheitszeichens ist völlig unverstanden. Infolge dessen gelingt das Umstellen von Gleichungen nicht.** Offensichtliche Fehler werden nicht entdeckt, und anstelle von Verständnis werden Verfahrensregeln gepaukt:



„Zuerst muss man die drei rüberholen, damit 4x alleine ist. Und dann muss man zum Schluss immer teilen und das x bleibt dann immer übrig. Und sieben durch sieben geht gut, das ist eins.“ Solche „Erklärungen“ bekommen wir immer wieder zu hören. Das x „wird isoliert“, „Zahlen fliegen raus“, werden „rübergeholt“, „fallen weg“ oder werden „von einer auf die andere Seite gebracht“.

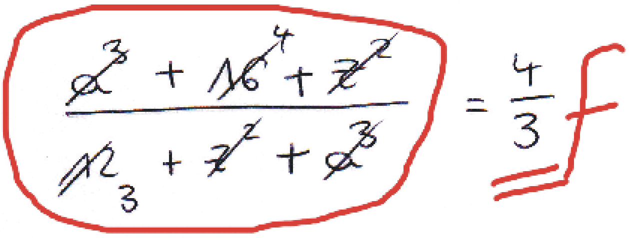
2. **Die Bruchrechnung wird nicht beherrscht, weil es bereits erhebliche Verständnisprobleme bzgl. des Charakters einer Division gibt** (Stoff der zweiten Klasse).

Deshalb sorgt der gutgemeinte Tipp der Lehrerin (5/12 • 1/15x =1) bei der Korrektur der Klassenarbeit nur für noch mehr Unverständnis: *„Warum ich das rechnen soll, weiß ich auch nicht!“*

3. **Der Umgang mit dem neutralen Element bzgl. der Punkt- und Strichrechnungen bleibt meist völlig unklar** (wenn 4x = 7 ist, kann x niemals die Zahl 1 sein). Als Folge können sich keine Strategien beim Lösen linearer Gleichungen entwickeln.

4. **Das Operationsverständnis, was die vier Grundrechenarten angeht, ist häufig nur lückenhaft, gelegentlich auch gar nicht entwickelt**. Und das hat dann gravierende Auswirkungen auf den

5. **Zusammenhang der Rechenarten** (z. B. die Multiplikation als fortgesetzte Addition der gleichen Zahl; die Division als inverse Rechenart zur Multiplikation und daraus schlussfolgernd die Division als fortgesetzte Subtraktion). Kein Wunder, wenn dann beispielsweise durch Null dividiert wird, vorzugsweise dann, wenn in Kombination mit diesem Problem der Bruchzahlbegriff nicht klar ist etc. Weiteres Resultat dieses Unverständnisses ist die völlige „Ignoranz“ gegenüber einschlägigen Rechengesetzen (Assoziativgesetz, Kommutativgesetz, Distributivgesetz). Des weiteren bekommt dann das Prinzip der Rangfolge der Rechenarten massive Existenzprobleme (z.. B. Punkt-vor-Strich-Rechnung), was mit einer „Missachtung von Vorfahrtsregeln“, wie Papa oder die große Schwester es beim Üben zu Hause schon tausendmal „erklärt“ haben, nun wirklich gar nichts zu tun hat! Und der in einer schier endlosen Litanei wiederholte Spruch „Aus Summen kürzen nur die...“ sorgt da auch nicht für mehr Klarheit.

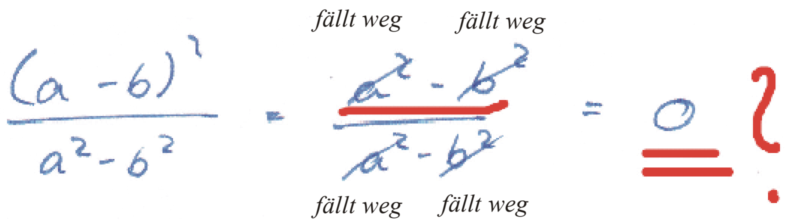


„Viel später stellte sich z. B. heraus, dass sie den Satz: „Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen“ grundsätzlich nicht aufsagte, wenn ich nach einem Fehler nach diesem Satz fragte, da sie dann über sich selbst hätte aussagen müssen, dass sie dumm sei. Diese Arbeitsverweigerung war mir damals noch unerklärlich und senkte die Stimmung ganz erheblich.“

(Sandras Schwester)

In solchen Nöten verhaftet führen rechenschwache Kinder/Jugendliche regelrechte Vernichtungsfeldzüge gegen jegliche Sorte von Termen, Funktionen und geometrischen Figuren. Gleich ganze Scharen von Parabeln sehen sich einem traurigen Ende gegenüber, weil bei der Funktion $f(x) = x^2 - 2x + 3$vor dem Summanden x^2 weit und breit keine Zahl zu entdecken ist, und wenn da *„nichts“* steht *„ist das Null“* und *„0 mal x^2 ist 0“* – zack, Parabel weg!

Es ist sehr wichtig, dass man den Schülern ihre unmathematischen Formulierungen nicht durchgehen lässt, denn auch das sorgt dann nicht nur für noch mehr Chaos, sondern auch dafür, dass dem Unverständnis immer wieder Quotienten zum Opfer fallen, wenn beim Kürzen alles „wegfällt“:



Nicht nur der Quotient ist restlos erledigt!

(Lena, Klasse 13 Gymnasium)

Einmal ganz abgesehen davon, dass das Verhältnis von rechenschwachen Jugendlichen zu binomischen Formeln meist nur als restlos zerrüttet angesehen werden kann, führt u.a. das mangelhafte Verständnis, was das neutrale Element der Punktrechenarten angeht, auch dazu, dass Lösungen bei quadratischen Gleichungen entfallen und sich so Nullstellen von Parabeln förmlich in Luft auflösen:

$f(x) = x^2 - x$

$f(x) = 0$

$0 = x^2 - x$ ✓

$0 = \underline{x(x)}$ $\|$ $|\sqrt{}$

$0 = x^2$

$x = 0$ ↯

Nullstelle erfolgreich erlegt!

Das wird dann bei der Skizze des Grafen richtig „heavy“, wenn der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse liegt!

Auch Potenzen sind vor diesem „algebraischen Gemetzel“ nicht gefeit:

$\frac{a^6}{a^2}$	$\frac{a^{\cancel{6}\,\underline{3}}}{a^{\cancel{2}}}$	$\frac{\cancel{a}^{\cancel{6}\,\underline{3}}}{\cancel{a}^{\cancel{2}}}$	$\frac{\cancel{a}^{\cancel{6}\,\underline{3}}}{\cancel{a}^{\cancel{2}}} = \underline{3}$
Der Gegner!	Exponent im Nenner erledigt!	Jetzt ist die Basis fällig!	Überlebt hat nur die drei!

Wie bereits erwähnt: In der Skala der „Beliebtheit“ ganz weit oben angesiedelt, ist die konsequente „Missachtung“ der Rangfolge der Rechenarten. Der alte Pythagoras möge es den Kindern verzeihen, wenn rechtwinklige Dreiecke dem Erdboden gleich gemacht werden und aus seinem bei rechenschwachen Jugendlichen berüchtigten Satz die Erkenntnis gezogen wird, dass die Summe der Längen der Katheten gleich der Länge der Hypothenuse ist. Gott sei Dank, dass dem nicht so ist!

$a^2 + b^2 = c^2$ $\quad |\sqrt{}$

$\underline{a + b} = c$ $\|$

Viel zu spät erkannt

Februar 2004
Im Therapieraum sitzt die damals 14jährige Carmen zusammen mit einer Lerntherapeutin und brütet über Aufgabenstellungen aus dem 2. Schuljahr. Carmen kann nur wenige Ergebnisse aus dem kleinen 1x1 spontan benennen, muss immer wieder lange nachdenken und zählt manchmal an ihren Fingern ab. Die ersten drei Klassen auf dem Gymnasium hat sie in Mathe mit einer Beton-Fünf gerade noch überstanden und in der Grundschule hatte sie in Mathe immer eine drei. Jetzt sackt das ansonsten sehr gescheite Mädchen in allen anderen Fächern auch noch ab. Die Lehrer überlegen, ob Carmen „auf dem Gymnasium richtig aufgehoben ist“. Auch die Mutter (selbst Lehrerin) weiß nicht, ob sie ihre Tochter überfordert, und Carmen selbst glaubt auch, dass sie für's Gymnasium „einfach zu doof“ ist.

Carmens Lehrer weiß inzwischen um die Dyskalkulie seiner Schülerin. Er sitzt am Abend an seinem Schreibtisch und konzipiert die nächste Klassenarbeit. Thema: Rechnen mit Potenzen mit rationalem Exponenten. Es ist die erste Arbeit im neuen Schuljahr, und weil er die algebraischen „Künste“ seiner Schülerin kennt und Carmen nicht sofort mit einem Ungenügend ins Schuljahr starten soll, reduziert er alle Aufgabenstellungen mit Variablen auf ein absolutes Minimum und ersetzt sie mit Fragestellungen aus dem kleinen 1x1. Das Ergebnis war trotz allem guten Willen niederschmetternd:

$$\sqrt{27} = \underline{\sqrt{4} \cdot \sqrt{7}} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

Man soll sich überhaupt nichts vormachen, was den schulischen Erfolg einer Lerntherapie oder die Einstellung zur Mathematik angeht, wenn uns die Kinder erst in der siebten oder achten Klasse vorgestellt werden, dann, wenn nichts mehr geht: Mathe ist und wird das „Hassfach Nr. 1“ bleiben und alle Versprechungen in Tageszeitungen nach der Marke „Ruckzuck ist die Mathe-Fünf weg und ihr Kind hat wieder Spaß beim Rechnen“ kann man ganz getrost zu den Akten legen! Früherkennung ist notwendig – und wenn das Kind schon nicht in der Grundschule aufgefallen ist, dann sollte ein Test zu Beginn der fünften Klasse in allen Schulformen Aufschluss über die mathematischen Fertigkeiten der Kinder geben (z. B: Heidelberger Rechentest – HRT-I – Kommentierung in der letzten Ausgabe von Kopf und Zahl).

Wolfgang Hoffmann, MLZ Dortmund

$$a)\ 25a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$
$$= \underline{150}\,a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c) \quad f$$

Wie kommst du auf diese Zahlen???

Gar nicht so furchtbar schwer!

Zunächst müssen alle Zahlen ausgeklammert werden und weil vor der Klammer nur eine Zahl stehen "darf", werden die Zahlen kurzerhand "zusammengefasst", "damit die alle drin sind".

$$a)\ 25a^2b^3c^4 \overset{+}{} 50a^3b^4c^2 \overset{+}{} 75a^4b^2c^3$$
$$= \underline{150}\,a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c) \quad f$$

"Und jetzt brauche ich drei Zahlen für die Klammer. Ich muss alles durch die erste Zahl teilen, die fällt dann weg."

$$a)\ \cancel{25}a^2b^3c^4 + 50a^3b^4c^2 + 75a^4b^2c^3$$

Fällt weg

:25   :25   :25

$$= \underline{150}\,a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c) \quad f$$

Jetzt kommt ein richtiger Teilschritt, aber mit was für einer Begründung! "Jetzt nehme ich von allen dreien" Carmen meint die Summanden) "immer die kleinste Zahl" (Carmen meint die niedrigste Potenz) "und schreibe sie auch vorne hin. Die sind dann auch weg."

$$a)\ 25\cancel{a^2}b^3c^4 + 50a^3b^4\cancel{c^2} + 75a^4\cancel{b^2}c^3$$
$$= \underline{150}\,a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c) \quad f$$

"Die anderen bleiben übrig und müssen in die Klammer. Man muß aber jetzt immer minus zwei rechnen."

$$a)\ 25\cancel{a^2}b^3c^4 + 50a^3b^4\cancel{c^2} + 75a^4\cancel{b^2}c^3$$

-2   -2   usw.

$$= \underline{150}\,a^2b^2c^2(\underline{6}bc^2 + \underline{3}a^1b^2 + \underline{2}a^2c) \quad f$$

Nicht nichts gedacht, aber trotzdem nichts gebracht!