Kopf und Zahl

JOURNAL
des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie** e.V.
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**
7. AUSGABE, 2007
www.dyskalkulie.de

Wege zum Schriftlichen Dividieren

Einige Anregungen zur Erarbeitung in der dritten und vierten Jahrgangsstufe

Teil I: A. v. Schwerin, München und M. Gaidoschik, Wien

„Naja, sagte der Zahlenteufel und grinste. Ich will ja nichts gegen deinen Lehrer sagen, aber mit Mathematik hat das wirklich nichts zu tun. Weißt du was? Die meisten Mathematiker können überhaupt nicht rechnen. Außerdem ist ihnen dafür die Zeit zu schade. Für so was gibt es doch Taschenrechner. … Ein bisschen Einmaleins, dagegen ist ja nichts einzuwenden. Kann ganz nützlich sein, wenn einem die Batterie ausgeht. Aber Mathematik, mein lieber Schwan! Das ist ganz was anderes!“
Hans Magnus Enzensberger, Der Zahlenteufel, dtv -Verlag

Vorbemerkung

Das schriftliche Dividieren ist unter den schriftlichen Grundrechenverfahren eindeutig dasjenige, welches die höchsten Anforderungen stellt, in zweifacher Hinsicht:

- Einerseits verlangt es in den einzelnen Rechenschritten sicheres Kopfrechnen in allen vier Grundrechenarten (klarerweise das Dividieren im Bereich des kleinen Einmaleins selbst, damit aber eben auch das Multiplizieren; dazu das Addieren bei den Teilmultiplikationen mit Übertrag, des Weiteren das Subtrahieren oder – je nach Verfahren Ergänzen zur Restermittlung).
- Andererseits ist das Verfahren selbst eine recht komplexe Abfolge von Schritten – weit komplexer als das relativ einfach „gestrickte“ Additionsverfahren, aber auch jene der schriftlichen Subtraktion und Multiplikation.

Dementsprechend groß sind die Probleme vieler Kinder beim Erlernen dieses Verfahrens; und wir sprechen dabei keineswegs nur von den sogenannten „rechenschwachen“ Kindern. Aus langjähriger Erfahrung halten wir diese Probleme für in den meisten Fällen lösbar. Allerdings haben wir, gleichfalls aus langjähriger Erfahrung, den Eindruck gewonnen, dass das Erlernen dieses objektiv nicht einfachen Verfahrens oft unnötig erschwert wird.

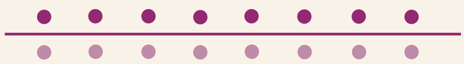
weiter Seite 2

Der Zahlaspekt beim Mengenvergleich –

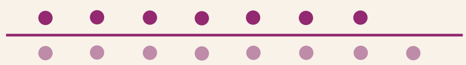
ein diagnostischer Einblick in das Zahlverständnis des Kindes

K.Rochmann, Osnabrück

Einen wichtigen Anhaltspunkt über das Verständnis eines Kindes in Bezug auf Zahlwörter verschafft die Überprüfung der mathematischen Begrifflichkeiten beim Mengenvergleich. In unserer Förderdiagnostik und in der lerntherapeutischen Arbeit fallen oft Fehlurteile bei der Anwendung von Vergleichskonzepten auf. Doch wie lässt sich der Wissensstand des Kindes genauer herausfiltern?
Vor uns liegt eine Versuchsanordnung mit zwei Reihen gleich großer Plättchen, die in einer Eins-zu-Eins-Anordnung ausgerichtet sind.



Zunächst soll geprüft werden, ob sich das Kind in seinem Urteil sicher ist, dass in beiden Reihen gleich viele Plättchen liegen. Anschließend wird es aufgefordert, aus seiner Reihe einen Chip auszusuchen und wegzunehmen. Die Gleichmächtigkeit der Anzahlen wird dadurch aufgelöst: ein Plättchen auf einer Seite fehlt.



weiter Seite 7

Diese Ausgabe hat die Schwerpunkte: Division und Zahlbegriff

INHALT

Wege zum Schriftlichen Dividieren Teil I

Fortsetzung von Seite 1

Daher wollen wir im Folgenden einige didaktische Anregungen für die Erarbeitung der schriftlichen Division geben – und damit, wie immer, zur Diskussion stellen: kritische Rückmeldungen unter **institut@rechenschwaeche.de** sind uns willkommen!

Uns wäre aber höchst unwohl dabei, auf diesem Feld Anregungen für die Erarbeitung zu geben, ohne zugleich auf die Diskussion zu verweisen, die unter Mathematik-Fachdidaktikern über die Neubewertung der schriftlichen Rechenverfahren im Allgemeinen und der schriftlichen Division im Besonderen geführt wird: Sie fordern seit Jahren eine Neubewertung der schriftlichen Rechenverfahren im Unterricht der Grundschule (zur Diskussion vergleiche etwa Radatz/Schipper/ Dröge/Ebeling (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht, 3. Schuljahr, Hannover: Schroedel). Dabei will wohl niemand die schriftlichen Verfahren „abschaffen“; die Frage muss aber gestellt werden, *zu welchem Zweck* und daher *in welcher Form* die schriftlichen Verfahren im Zeitalter des Taschenrechners noch Thema des Unterrichts sein sollen. Die (fachwissenschaftliche) Diskussion geht recht einhellig in Richtung einer stärkeren Betonung von Kopfrechnen (das freilich auch „halbschriftlich“ gestützt werden kann und soll) und überschlagendem Rechnen; bei Vermittlung der schriftlichen Verfahren sollte das Hauptaugenmerk darauf gelegt werden, dass der Zusammenhang der Rechenschritte mit der zu Grunde liegenden Operation verstanden wird, es sollte also um **Einsicht in das Verfahren** gehen an Stelle eines bloßen „Regelbefolgens“.

„Für die heutige Zeit bildungswirksam ist nicht die Fähigkeit, ein spezifisches Verfahren nur ausführen zu können. Vielmehr muss das nicht eben neue Ziel, dass die Kinder auch verstehen, was sie dort machen, endlich nachhaltiger verfolgt werden. Der Unterricht darf daher nicht bei der Beherrschung der Technik stehen bleiben, sondern der Rechenweg selbst muss genauer untersucht und so das Verständnis für das Verfahren gefördert werden.“ (vgl. W. Schipper , Kompetenzentwicklung beim schriftlichen Rechnen in: A. Fritz, G. Ricken, S. Schmidt (Hrsg.), Rechenschwäche Basel, 2003 S. 102)

Welcher Stellenwert auch immer dem schriftlichen Dividieren in Zukunft im Unterricht beigemessen wird, seine didaktische Vermittlung bleibt in jedem Fall eine spannende, anspruchsvolle Aufgabe. Und wie stets in Fragen der Didaktik geht es auch hier – wie Günter Krauthausen zu Recht betont – nicht um „Rezepte mit Wirkungsgarantie“, sondern um „Wahrscheinlichkeitsaussagen“: Ziel dieser Anregungen ist es also, „Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen“ (vgl. Krauthausen, G. (2003): Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In: Rechenschwäche, ebenda).

1. Verständnis des Dividierens sowohl als Verteilen wie auch als Enthaltensein bzw. Aufteilen

Schriftliches Dividieren ist kaum verstehbar, wenn nicht das Dividieren selbst sowohl als Verteilen wie auch als Aufteilen, bzw. Enthaltensein verstanden wird: Gefordert ist ein flüssiges „Hin und Her“ zwischen beiden Grundvorstellungen:

- 20 Würfel müssen auf 4 Personen verteilt werden, und die Rechnung ermittelt, wie viele Würfel jeder bekommt.
- 20 Schüler sollen sich zu einer Gruppe von je 4 Schülern aufteilen, wie viele Gruppen ergibt das?

Mit der Division kann man also die Größe des einzelnen Teils ausrechnen, wenn der Divisor die Anzahl der Teile vorgibt. Oder die Anzahl der Teile wird errechnet, dann gibt der Divisor die Größe des einzelnen Teils vor.
Nun zeigt aber die Erfahrung, dass viele Kinder (und Erwachsene!) anhaltende Schwierigkeiten mit dieser „Zweideutigkeit“ des Dividierens haben.

Daraus folgt:

- Die beiden Aspekte sollten in der Erarbeitung zunächst sorgfältig getrennt werden; es sollte zunächst nur ein Aspekt, dann der andere jeweils für sich erarbeitet werden; erst wenn jeder Aspekt für sich geklärt ist, gilt es, beide auch in ihrem Zusammenhang zum Gegenstand des Unterrichts zu machen und dabei sollten jeweils beide Aspekte beachtet werden!

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie eV.

Internet: **www.dyskalkulie.de**
Email: **verein@dyskalkulie.de**

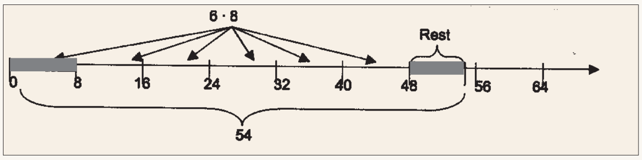
Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund
Rudolf Wieneke, Berlin
Layout und Satz: Illustration + Grafik, Tanja Gnatz, Gröbenzell

- Auch im weiteren Verlauf (bis zur vierten Jahrgangsstufe) sollte immer wieder das Operationsverständnis für die Division zu einem eigenständigen Thema im Unterricht gemacht werden: Kinder sollten immer wieder dazu aufgefordert werden, zu einer Division passende Handlungen, Zeichnungen (beim Teilen nur eingeschränkt durchführbar) und Sachsituationen zu finden; und dabei sollten jeweils beide Aspekte beachtet werden!
- Dafür sollten auch immer wieder „ausführliche Sprechweisen" eingefordert werden, z. B. für „12 : 4" entweder „12 wird auf vier Kinder/Portionen verteilt, jedes bekommt 3" oder aber „12 wird in lauter Vierer-Portionen aufgeteilt; es gibt 3 solche Vierer-Portionen ".
- Bei Verwendung der „in" - Sprechweise sollte immer wieder thematisiert werden: Wie heißt dieselbe Rechnung in „geteilt" - Sprechweise?, also z. B. : „4 in 12" kann ich auch so rechnen: „12 geteilt durch 4" Und dasselbe auch in umgekehrter Richtung!
- Wohlgemerkt: Bei all dem kommt es darauf an, dass die Kinder das Dividieren in beide Grundvorstellungen erkennen und praktisch anwenden können.

2. Division mit Rest

Ein Vorschlag zur Erarbeitung des Dividierens mit Rest: Messen am Zahlenstrahl

Vorgestellt am Beispiel „54 : 8"



Voraussetzung:

- Vertrautheit mit dem Zahlenstrahl als Längendarstellung von Zahlen
- Operationsverständnis der Division (ohne Rest) als Enthaltensein

Material:

- Großzügig dimensionierter Wand - Zahlenstrahl, am besten mit Einermarkierungen nur bis 10, dann nur noch Zehnermarkierungen.
- Bunter Kartonstreifen. Dieser wird am Wand - Zahlenstrahl auf die Länge „8 Einer" zurechtgeschnitten.

Schritte:

1. „54 : 8 " heißt (Operationsverständnis für das Enthaltensein!): Wie oft passt der Streifen der Länge „8" in die Gesamtlänge „54"? Das ausprobieren lassen.
2. Er geht 6mal hinein, ein siebentes Mal nicht mehr.
3. Mit 6mal 8 komme ich aber nur bis 48, es bleibt ein Rest. Diesen Rest als Strecke von 48 bis 54 mit Farbe markieren lassen.
4. Wie berechne ich den Rest? Häufig wird in dieser Anordnung das Kind von selbst draufkommen: 48 + ? = 54 oder 54 – 48 = ?
5. An beliebigen anderen Beispielen wiederholen, bis die selbstständige Durchführung in allen Schritten kein Problem mehr ist.

Wir schreiben als Vorbereitung des schriftlichen Divisions – Verfahrens:

Zunächst die 3 Schritte getrennt anschreiben,
am Beispiel „54 : 8"

1. Schritt:
Wie oft geht 8 in 54?
Aufgeschrieben: **54 : 8 = 6 mal, mit Rest**

2. Schritt:
Bis wohin am Zahlenstrahl komme ich genau?
(Mal-Rechnung) Aufgeschrieben: **6 • 8 = 48**

Die **Multiplikationsaufgabe** ermittelt also, wie viel von 54 habe ich tatsächlich geteilt. Die sog. „Probe"-Aufgabe beweist sozusagen, dass die 8 in 54 sechs mal „reingeht", kein siebtes Mal und sie hilft bei der Frage:

3. Schritt: Wie viel Rest bleibt?
Aufgeschrieben: 48 + ? = 54, Ergebnis: 6
Oder besser: 54 - 48 = 6

Dazu dann die abgekürzte Schreibweise mit Doppelpunkt erabeiten:

54 : 8 = 6 R6	Dazu gesprochen:	**1)** 8 in 54 = 6 mal
<u>-48</u>		**2)** 6 mal 8 = 48
6 R.		**3)** 54 minus 48 ist gleich 6

Dem Schüler muss einsichtig werden, warum er bei diesem Rechenverfahren, obwohl das Thema Division heißt, mitten drin multiplizieren und subtrahieren muss.

Auf dieser Grundlage kann und soll durchaus auch auf eine Bewältigung solcher Aufgaben als „reine Kopfrechnung" hingearbeitet werden; wenn aber einzelne Kinder das Aufschreiben länger (oder vielleicht sogar auf Dauer) brauchen: Warum nicht?

3. Erarbeitung des Verfahrens der schriftlichen Division mit Material

Geeignetes Material:

Dezimalsystem-Material (Hunderterplatten, Z -Stangen, E -Würfel) oder, wegen des Realitätsbezuges fast besser: Rechengeld (nur Hunderter, Zehner, Einer verwenden!)

Schwierigkeitsstufen:

1. Stufe: Zahl lässt sich ohne Rest Stelle für Stelle teilen, **Beispiel: 848:4**

Schritte:

- Kinder nehmen sich 8 H -Tafeln, 4 Z -Stangen, 8 E -Würfel
- Sicherung des Operationsverständnisses: Kinder müssen verstanden haben, dass es darum geht, diese 848 auf 4 Personen gerecht zu verteilen!

- Kinder sollen selbst überlegen, wie sie dieses Verteilen durchführen können
- Ob sie dabei mit H oder E beginnen, ist hier noch gleichgültig und sollte ruhig dem einzelnen Kind überlassen bleiben!
- Erst nur handelnd, später parallel zum Handeln gemeinsam aufschreiben (s. u.).
- Dann nachträglich aufschreiben lassen, Schritte in der Erinnerung wiederholen.
- Dann ohne Material durchführen, Schritte in der Vorstellung durchführen und notieren lassen.

Erarbeitung der Schreibweise:

8 H : 4 = 2 H	man könnte auch rechnen:	8 E : 4 = 2 E
4 Z : 4 = 1 Z		4 Z : 4 = 1 Z
8 E : 4 = 2 E		8 H : 4 = 2 H

Soweit jeder Stellenwert ohne Rest zu dividieren ist, ist die Reihenfolge beliebig. Es ist für die Einsicht in das Verfahren der schriftlichen Division nützlich, wenn die Schüler die Aufgabe mit wechselnder Reihenfolge durchführen können, und dabei am Ende auf eine dem jeweiligen Stellenwert der Ziffer entsprechende Zusammensetzung der Zahl achten.

2. Stufe: Zahl lässt sich nur mit Rest an einer Stelle teilen, Beispiel 834 : 2

- Kinder teilen Stelle für Stelle, wie gehabt.
- Problem: 1 Z bleibt übrig, was tun?
- Der übrig gebliebene Zehner kann in 10 Einer getauscht werden. Diese können dann zusammen mit den 4 E problemlos aufgeteilt werden.
- Erst auf Grundlage dieses Problems wird verständlich: Beim Teilen ist es besser, mit der größten Stelle zu beginnen (sonst wird es umständlich beim parallelen Aufschreiben)!
- Daher soll es ab jetzt zur Gewohnheit werden: Beim Teilen ist es (anders als bei Plus, Minus, Mal) geschickter, mit der größten Stelle zu beginnen – nicht als unvestandene Regel, sondern aus Einsicht!

3. Stufe: Zahl lässt sich nur teilen, wenn man schon zu Beginn an der größten Stelle umtauscht, Beispiel 324 : 4

- 3 H sind zu wenig, um sie an 4 Kinder zu verteilen. Was tun?
- Tauschen! 3 H = 30 Z . Zum Verteilen gibt's nun 32 Z!

4. Erarbeitung der Schreibweise Am Beispiel: 316 : 4 = ?

Zunächst empfiehlt sich getrenntes Anschreiben der Stellen, um deutlich zu machen, dass sich Hunderter und Zehner für sich ohne Stellentausch nicht teilen lassen:

3 H : 4 =
1 Z : 4 =
6 E : 4 =

Dann führt man den Stellentausch durch, **parallel dazu** sprechen / anschreiben:

3 H : 4 ???	Geht nicht!	3 H = 30 Z!
31 Z : 4 = 7 Z	4 · 7 = 28	Rest: 3 Z = 30 E!
36 E : 4 = 9 E	4 · 9 = 36	Kein Rest!

Wir mussten wieder **multiplizieren** (4 • 7), um heraus zu finden, wie viel Zehner (von den 31 Z) wir tatsächlich durch 4 geteilt haben, nämlich 28 Z, und diese **subtrahieren** wir von 31 Z, um den **Rest** zu ermitteln. Er wird jetzt mit der nächst niedrigeren Stelle geteilt:
Der Rest von 3 Z wird in 30 E getauscht, um im nächsten Schritt zusammen mit den 6 E durch 4 geteilt zu werden.

Dazu die ausführlichen Schreibweise:

```
 3 1 6 : 4 = 7 9
-2 8
   3 6
  -3 6
     0 Rest
```

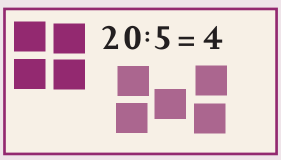
Noch eine Empfehlung zum Schluss: man sollte vor der Durchführung der schriftlichen Divisionsaufgabe die Schüler das erwartete Ergebnis schätzen lassen, um die Vorstellung der Größenrelation von Dividend und Divisor zu fördern, die dem Schüler die Möglichkeit der Selbstkontrolle der Ergebnisse geben soll.

Teil II mit Anregungen für die schriftliche Division mit zweistelligem Divisor folgt in einer der nächsten Ausgaben von Kopf und Zahl!

Die Division – Falsch verstanden

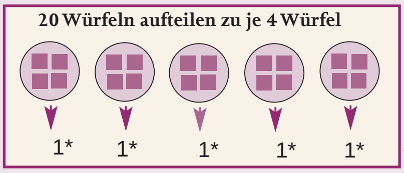
Wenn bei 20 : 4 = 5 vier Steckwürfel und fünf Steckwürfel assoziiert werden, sind die Punktrechnungen unverstanden

K. Rochmann, Osnabrück

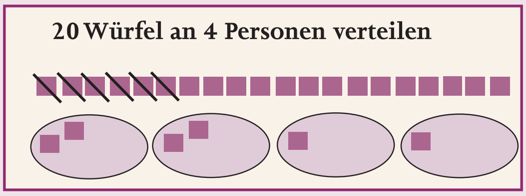


Emma, 8 Jahre alt und in der 3. Klasse, kann die Lösung für 20 : 4 spontan mit „5" benennen. Auch der Aufforderung, diese Aufgabe mit Steckwürfeln zu zeigen, kommt sie ohne Zögern nach. Sie greift in die neben ihr stehende Kiste und legt vier und weitere fünf Würfel. Neun Würfel liegen auf dem Tisch. Das fordert zu einer Nachfrage heraus, die Emma ohne Schwierigkeiten beantwortet: „Wenn man Mal rechnet, sind es 20." Wer damit nicht zufrieden ist, dem bleibt Emma die weitere Erklärung nicht schuldig: „Wenn man Mal rechnet, muss man alles doppelt nehmen, 4+4 und 5+5!"
(Emma erinnert sich an Übungen zum Verdoppeln und Halbieren, als Fragmente des schulischen und häuslichen Unterrichts bei der Einführung von der Multiplikation und der Division.)

Dennoch bleibt eine Frage offen: „Bei 4 + 4 = 8 und 5 + 5 = 10 ergibt die Summe beider Additionen 18 und nicht 20?“ Dieser Widerspruch stellt auch Emma zunächst vor ein Rätsel, für dessen Auflösung sie selbst ein Angebot parat hat: „Dann müssen noch zwei Würfel dazu. Die kann man aber nicht sehen, denn 2 • 0 sind Null.“
Mit diesem Urteil braucht es für 20 : 4 nur insgesamt neun Steckwürfel. Emmas Materialhandlung weist auf grundlegende Verständnisschwierigkeiten hin.



Die Division ist auf der anschaulichen Ebene nicht als fortgesetztes Wegnehmen verinnerlicht. Gemeint ist damit die Fragestellung: Wie oft kann man immer vier von 20 wegnehmen? bzw. Wie oft sind vier in 20 enthalten? Fünf mal
Inhaltlich ist Emma auch der Zugang zur zweiten Vorstellung von der Division verschlossen geblieben. Der Fragestellung, wie groß die jeweiligen Teile sind, wenn 20 Steckwürfel an 4 Leute verteilt werden: Wie viele Würfel bekommt jeder? Fünf Würfel.



Außerdem macht die Materialhandlung deutlich, dass die Multiplikation nicht als verkürzte Schreibweise einer fortgesetzten Addition gleicher Teilmengen verstanden wurde. Vielmehr werden die beiden Faktoren wie zwei Summanden behandelt. Dieses Missverständnis hat zur Folge, dass Emma sich zu jeder Punktrechnung eine falsche Mengenvorstellung eingeprägt hat, die im Widerspruch zur ausgeführten „Rechnung“ steht. Bei vielen Kindern führt das *inhaltsleere Auswendiglernen* zu dem häufig beobachteten Phänomen, dass heute noch alles gekonnt wurde und morgen alles wie weggeblasen ist. Ein Indiz dafür sind stark schwankende Leistungen in dem Stoffgebiet bzw. die Beobachtung einer gravierenden Vergesslichkeit, wenn das Thema einige Zeit nicht unterrichtsrelevant war.

Rubrik Veranschaulichungsmaterial: Die Hundertertafel

Ch. Graefen, München

Vorbemerkung: Um innere Vorstellungsbilder für Mengen bzw. Größen zu entwickeln, benötigen die meisten Schüler Veranschaulichungsmaterial. Dies gilt gerade für Schulanfänger und in besonderem Maße für rechenschwache Kinder. Veranschaulichung soll dazu dienen, die Größenvorstellung von Zahlen zu entwickeln und Rechenvorgänge erlebbar und dadurch verstehbar zu machen.
Natürlich dürfen die Erwartungen nicht überspannt werden: Veranschaulichung kann nur als Ausgangspunkt, nicht als Ersatz für eigene Überlegungen des Kindes dienen. „Es ist ein Irrtum zu glauben, die mathematische Operation sei im Veranschaulichungsmaterial enthalten.“ (J-H. Lorenz: Der gescheiterte Rechenunterricht: Rechenversagen und „Therapie“)
Darüber hinaus gilt: Es gibt nicht **das** Veranschaulichungsmittel schlechthin. Alle Materialien sind Darstellungen, die einen oder mehrere bestimmte Zahlaspekte betonen. Daher sind sie für die verschiedenen didaktischen Teilziele besser oder weniger gut geeignet.

In loser Folge sollen an dieser Stelle verschiedene gängige Materialien besprochen werden hinsichtlich ihrer Stärken und Schwächen.

Die beschriftete Hundertertafel

Die Hundertertafel ist eine strukturierte Darstellung des Zahlenraums 1 bis 100, die den ordinalen Zahlaspekt betont. Pro Zeile werden 10 Zahlen aufgeführt, so dass

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

sich ein Quadrat von 10 Zeilen à 10 Spalten ergibt.
Jede Zahl hat in je *einem Kreis* ihren Platz auf dieser Tafel. Die Einer werden in Richtung rechts hinzugefügt. Nach jedem vollen Zehner wird wieder links begonnen. Ein Zehner verläuft also von links nach rechts. Viele Schüler haben ein Problem mit diesem Standortwechsel, für den sie nach jeder Zehnerzahl den Blick wieder nach ganz links in die erste Spalte richten müssen. Dies allein soll hier kein Einwand gegen die Tafel sein. Richtiges Verständnis des Zahlaufbaus unterstellt,

ist dieser Umstand nur eine Herausforderung an die ziel- und zeilengenaue Wahrnehmung.
Bedenkenswert ist die Klage jedoch, wenn der Schüler die Rechenrichtung absolut setzt (nach rechts wird es mehr) und deswegen durcheinander kommt: Wenn er jetzt wieder nach links schauen muss, dann wird es doch weniger. Dann wäre 11 kleiner als 10! Ein solches Verständnisproblem entsteht, wenn nicht klar ist, dass die Zahl 11 auch alle 10 Einer der oberen Zeile umfasst. Wie kann es zu einem solchen Problem kommen?
Jede Zahl hat, wie gesagt, **einen bestimmten, festgelegten Ort** auf der H-Tafel.

Sie wird als ein Einer-Kreis dargestellt. Der Zusammenhang mit den anderen Zahlen **vor** dieser Zahl ist nicht erkennbar. Die Zahl 11 steht im 11. Kreis, was nahe legt, dass es sich bei dieser Zahl nur um diesen einen Kreis handelt und nicht den 11. Kreis **und** alle 10 Kreise, die davor stehen. Der **Ordinalaspekt** der Zahl wird auf diese Weise zum gültigen erhoben. Wenn ein Kind eine bestimmte Zahl auf der H-Tafel sucht, sie schließlich findet und darauf deutet, so bezieht es sich auf den **Platz** dieser einen Zahl. Dieser Platz selbst stellt aber nur die Menge 1 Einer dar. So verbindet ein Kind lediglich eine Ortsvorstellung mit der jeweiligen Zahl, aber keine Mengenvorstellung. Der kardinale Aspekt an der Zahl und eine damit einhergehende relationale Größenvorstellung wird so nicht entwickelt.

Fatalerweise denken rechenschwache Kinder die Zahl nur als Ordinalzahl: Zahlen sind eine Abzähl-Reihenfolge (ich spreche die Zahlennamen hintereinander). Das Abzählen an der Hundertertafel (immer einen Finger auf einen Kreis legend) kann diesen falschen Gedanken ungewollt bestätigen:

Dies wird durch die starre Anordnung unterstützt: Weder ist vorgesehen, dass ein Zehner auch von oben nach unten verlaufen könnte (was die Sache nicht unbedingt besser machen würde), noch dass eine *beliebige* Anordnung von 10 Einern eben auch einen Zehner ergibt.

Vorsicht: der Einsatz der beschrifteten H-Tafel in den ersten beiden Klassenstufen für die Erklärung des Zahlaufbaus kann den falschen (ortsgebundenen) Zahlbegriff rechenschwacher Kinder bestärken!
Als Argument für die Verwendung der Hundertertafel wird angeführt, dass sie den Zusammenhang der Zahlen im Zehnersystem systematisch darstellt. Es stehen z.B. immer untereinander: 5, 15, 25, 35 usw., also Zahlen, die sich immer um einen Zehner unterscheiden. Das ist zwar richtig, aber nur erkennbar, wenn ich die Sache mit dem Zehner *schon verstanden habe*.
Durch die Anordnung der H-Tafel selbst lernt das Kind genau genommen: wenn es rechts 1 mehr wird (Einer-Stelle), gehe ich eins nach rechts; wenn es links 1 mehr werden soll (Zehner-Stelle), muss ich 1 nach unten gehen. Der Unterschied liegt also nicht in der Menge, sondern in der Richtung. Vom Sachverhalt, dass ein Zehner ein Bündel von 10 Einern ist, ist so nicht zu erkennen.

Ein Beispiel aus einer Testsituation:
Anna K. soll laut vorrechnen, wie viel 12 + 11 ergibt: Sie sagt: „Für plus 10 muss ich 1 nach unten und für plus 1 eins nach rechts, macht insgesamt 2, also kommt 14 heraus“.

Anna K. aus der 2. Klasse hatte in der Schule die Zahlen bis 100 anhand der Hundertertafel gelernt. Die Rechenoperationen der Addition und der Subtraktion wurden den Kindern so näher gebracht:
Addiert man Einer, so geht man auf der Tafel vom Ort des 1. Summanden aus entsprechend viele Schritte nach rechts. Addiert man Zehner, so geht man vom Ausgangspunkt des 1. Summanden aus entsprechend viele Schritte nach unten. Für die Subtraktion von Einern also nach links, für die Subtraktion von Zehnern nach oben.
Durch die **Richtungsgebundenheit** der Operationen auf der H-Tafel besteht die Gefahr, dass sich ein falscher Operationsbegriff herausbildet. *Anstelle* der Vorstellung, dass die Addition das Hinzufügen von Einern/Zehnern bedeutet, prägen sich die Schüler die pure Richtung ein (plus heißt rechts und unten usw.)

Daher sollte die H-Tafel jedenfalls nicht als das einzige Material für die Veranschaulichung von Addition und Subtraktion dienen. Wenn zunächst anderes Material eingesetzt wurde, bedarf es des sorgfältigen Transfers dieser Darstellung mit jener auf der H-Tafel.

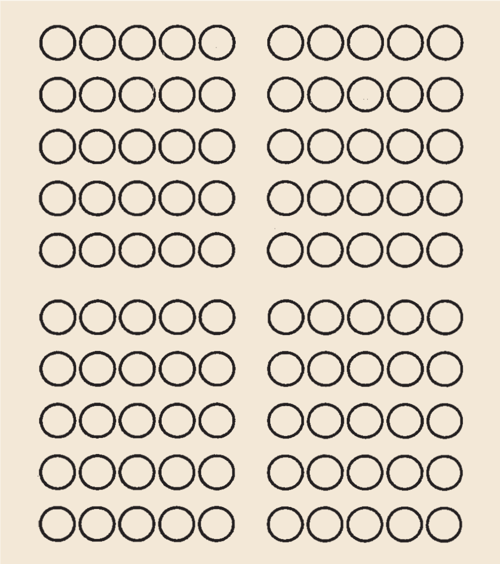
Stärken der beschrifteten Hundertertafel:

Wenn der Zahlenraum bis 100 eingeführt wurde und die Schüler in diesem Bereich eine relationale Größenvorstellung entwickelt haben, kann die beschriftete Hundertertafel ihre Vorzüge zeigen:

- **Der Unterschied zwischen Ziffer und Zahl kann thematisiert werden: Wie viele Zahlen gibt es auf der Tafel? Mit wie vielen Ziffern werden diese geschrieben. Bei welchen Zahlen bedeutet die Ziffer 5 5 Zehner, bei welchen bedeutet sie 5 Einer?**
- **Auch für das EinmalEins wichtige Erkenntnisse können „vermittelt“ werden, da sich die Gesetzmäßigkeiten der Reihen oft in Mustern abbilden lassen:**
- **Welche Zahlen sind gerade und welche ungerade? Wie viele von den Zahlen bis 100 sind gerade?**
- **Welches Muster bildet das 5er EinmalEins? Wie viele Zahlen kommen im 5er EinmalEins vor?**
- **Beim 9er EinmalEins bildet sich eine schräge Linie (ein Z mehr, ein E weniger) quer durch das Zahlenfeld**
- **Die Quadratzahlen bilden eine hübsche Diagonale.**
- **Welche Zahlen kommen in mehreren EinmalEins-Reihen vor?**
- **Welche Zahlen kommen in keiner Reihe vor?**

Das (unbeschriftete) Hunderterfeld

Sie ist besser zum Erwerb einer Größenvorstellung geeignet, da der Blick auf alle freien Felder der Tafel fällt.



Einige Übungsvorschläge:

- Mit Hilfe von 2 halbtransparenten Folien können Zahlen dargestellt werden.

  Beispiel 47: Mit der einen Folie werden 5 Zehner abgedeckt. Mit der anderen Folie im rechten Winkel dazu werden 3 Einer verdeckt.
- Die sichtbaren Felder können oben oder unten, rechts oder links auf der Tafel angesiedelt sein.

  Dies ist wichtig, um die **Ortsungebundenheit** der Zahl zu demonstrieren.
- Die Kinder können passende Zehnerstangen und Einerflächen auf die Tafel legen, um Zahlen darzustellen.
- Sie können auch entsprechend viele Kästchen bunt anmalen. Dabei ist es wichtig, sie die Kästchen auch einmal in anderer Anordnung als der üblichen Zehnerordnung anmalen zu lassen.
- Wenn man die 13 als verstreute Menge von Einern auf dem Feld hat, ist das auch in Ordnung, hat aber den Nachteil, dass man alle Einer einzeln zählen muss. Der Vorteil des Zehner-Bündelns wird offensichtlich.
- Wie viel ist 100 : 2? Falte die Tafel in der Mitte!
- Wie viel 100 : 4?

  Falte die Tafel der Länge und der Breite nach!

Nächste Folge der Rubrik Veranschaulichungsmaterial: Der Zahlenstrahl

Der Zahlaspekt beim Mengenvergleich –

ein diagnostischer Einblick in das Zahlverständnis des Kindes

Fortsetzung von Seite 1

Die Frage, „Haben wir beide gleich viele Plättchen oder hast du mehr oder weniger als ich?“, bereitet kein Problem: „Ich habe jetzt weniger!“, wird richtigerweise geantwortet. Die Frage, um wie viel, stellt dagegen viele Kinder, die uns vorgestellt werden, vor ein Rätsel. „Mehr“ bedeutet für sie häufig „weiter hinten“ in der Zahlwortreihe. Sie führen einen Vergleich der Positionen in der Zahlwortreihe durch. Zahlen, die „weiter hinten“ kommen, sind „größer“. Mit dieser Gewissheit entscheiden sie die Frage nach dem Größenvergleich meistens richtig: „acht ist größer als sieben“ und das Aufschreiben klappt auch: 8 > 7.
Schwierigkeiten haben Kinder mit diesem Verständnis in der Regel mit der Beantwortung von: „Wie viele habe ich mehr als du“, bzw. „Wie viele hast du weniger als ich?“ Diese Fragen können nicht beantwortet werden, weil die Zahlen in ihrer Vorstellungswelt nicht als Zusammensetzung von Anzahlen verinnerlicht sind.

Soll ein Kind die beiden Reihen mit Plättchen unter der oben genannten Fragestellung miteinander vergleichen, weiß es, dass acht mehr ist als sieben, weil die Zahl acht in der Zahlwortreihe nach der Zahl sieben kommt. Auf dieser Grundlage gelingt die Differenzierung zwischen „Wie viele habe ich?“ und „Wie viele habe ich mehr?“ nicht, denn beide Zahlwörter können diese Kinder nicht als Repräsentanten von Anzahlen vergleichen. In ihrer Vorstellungswelt beinhalten Zahlen, mit denen wir rechnen, nicht die Inklusion aller kleineren Anzahlen (rekursiver Zahlaufbau um eins: 4 = 1 + 1 + 1 + 1; 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und deshalb 5 = 4 + 1), sondern reduzieren sich auf den zuletzt gezählten Einzelgegenstand und damit auf das zuletzt genannte Zahlwort. Dieser subjektive Algorithmus führt vielfach ganz konsequent zu der Erwiderung: „Du hast acht mehr, ich habe sieben weniger“.
Einige Kinder können diese Fragestellung für den außenstehenden Betrachter dennoch korrekt beantworten, obwohl sie keine Einsicht in den kardinalen Zahlbegriff haben. Sie ordnen jedem Zahlnamen einen bestimmten Reihenfolgeplatz in der Zahlwortreihe zu (wie ein im Kopf visualisierter Zahlenstrahl) und können die gestellte Frage erst beantworten, nachdem sie beide Reihen mit Plättchen gezählt haben: „Du hast acht, ich habe sieben. Dann hast du einen mehr und ich habe einen weniger.“ Diese Information beinhaltet jedoch keinen quantitativen Vergleich, sondern ist eine Auskunft über die Zählschritte, die von sieben bis acht zurückgelegt werden. Dass der Unterschied Resultat des Wegnehmens des einen Plättchens ist und nicht der ermittelten Zahlnamen (Reihenfolgeunterschied),

ist dem Kind auf Grundlage der Ordinal-/Kardinalverwechselung verschlossen geblieben.

Will man sich Klarheit verschaffen, empfiehlt es sich, auch bei einer richtigen Antwort der Frage nachzugehen, wie das Kind zu seiner Lösung gekommen ist. Der vielleicht wohlwollend unterstellte Zusammenhang zwischen richtiger Antwort und richtigem mathematischen Verständnis sollte einer Überprüfung unterzogen werden: Mit welchem Zahlverständnis hat das Kind den Vergleich gelöst? Als tatsächlichen Mächtigkeitsvergleich oder als Benennung von Zählschritten im ordinalen Sinne, als eine Abfolge in der Zahlwortreihe?

Gemeinsam ist allen oben vorgestellten Lösungsstrategien, dass die Begrifflichkeit des „Unterschieds" als eine Interpretation der Differenz von Mengen nicht entwickelt wurde. Genau das, worauf es ankommt, bleibt uneinsichtig: das Bedingungsverhältnis von mehr/weniger.

Die nachfolgenden Beispiele sind insofern nicht überraschend, sondern zeigen, wie ein „Rechner" ohne mengenoperatives Verständnis auf die dargebotenen Inhalte reagiert, subjektive Algorithmen entwickelt, die häufig zu falschen, manchmal aber auch zu richtigen Ergebnissen führen. Dazu einige Beispiele von Kindern aus der zweiten und dritten Klassenstufe, die uns zur Überprüfung ihres mathematischen Entwicklungsstandes vorgestellt wurden. Bei ihnen haben die individuellen Lösungswege durchweg zu falschen Ergebnissen oder zu keinen Resultaten bei den aufgezeigten Fragestellungen geführt.

Die Sachaufgabe *„Tim hat fünf Murmeln. Lisa hat drei Murmeln mehr als Tim."*, kann auf der oben beschriebenen Grundlage notwendigerweise nicht richtig interpretiert werden, denn hier ist eine Relation zwischen Mengen vorgegeben.

Hannah bekommt diese Alltagssituation schriftlich vorgelegt, mit der Aufforderung, eine Frage, Rechnung und Antwort zu formulieren. Sie registriert die Zahlen drei und fünf, die Tim und Lisa zugeordnet sind und zieht daraus den Schluss, dass die Aufgabe falsch ist, weil Tim mehr Murmeln hat als Lisa. Hannah schreibt: „Falsch. Tim hat mehr Murmeln." Damit ist die Bearbeitung der Aufgabe für sie erledigt.

Hannah hat keine Einsicht, dass Zahlen in relativen Verhältnissen zu anderen Zahlen stehen und „mehr"/„weniger" Relationsbestimmungen keine absoluten Eigenschaften von Zahlen sind. Dies bestätigt sich, als Hannah anschließend aufgefordert wird, die Anzahlen „fünf" und „acht" miteinander zu vergleichen. Auch hier wird die Frage nach dem (mathematischen) Grund gestellt: „Wieso ist fünf kleiner als acht?" und „Wie viele Einer hat fünf weniger als acht?" Hannah ist sich sicher, dass fünf kleiner ist als acht, den Unterschied zwischen beiden Anzahlen kann sie jedoch nicht ermitteln. Hannah führt den für sie einzig plausiblen Beweis an: „Das weiß ich aus der Schule".

Auch Charlotte entdeckt einen Fehler in der Sachaufgabe, sie rückt gleich damit heraus: „Das stimmt nicht, Tim hat mehr Murmeln als Lisa.", und führt aus: „Weil fünf größer ist als drei." Als Charlotte anschließend aufgefordert wird, zu sagen, um wie viel fünf größer/mehr sei als drei, ist sie ratlos. Ihr Verdacht ist, dass bei einer Nachfrage von einem Erwachsenen an ihrem Ergebnis etwas nicht stimmt. Charlotte erkennt keinen Fehler, streicht die Segel und entgegnet ein wenig resigniert: „Das weiß ich nicht."

In Tinas Vergleichskonzepten zeigen sich ebenfalls Unsicherheiten in numerischen Anwendungsbereichen. Die Kenntnis, dass die Angabe über den Unterschied zweier Zahlen und über die Mächtigkeit einer der beiden Zahlen, den genauen Rückschluss über die zweite Zahl zulässt, ist bei ihr nicht gegeben. Tina kombiniert die im Text vorhandenen Zahlen nach der von ihr bevorzugten Rechenart und addiert: „5 + 3 = 8". Sie erklärt spontan: „Tim und Lisa haben zusammen acht Murmeln." Dass die Lösung im Widerspruch zum Sachverhalt der Rechengeschichte steht, bleibt von Tina unbemerkt.

Jens entscheidet gleichfalls nach seinem Gefühl und kombiniert die Zahlen subtraktiv: „5 – 3 = 2". Für Jens ist sein Vorgehen begründet: „Ich habe Minus gerechnet, weil da fünf Murmeln und dann drei Murmeln mehr steht. Da habe ich mir gedacht, mit drei mehr ist was komisch und dann rechne ich besser Minus."

Jana entdeckt in dieser Rechengeschichte keine Verbindung zu einer Rechenoperation, sondern interpretiert die Alltagssituation ausschließlich nach ihrem Gerechtigkeitsempfinden und entdeckt eine unfaire Ausgangslage. Ihre sachfremde Frage lautet: „Warum hat Tim so viel?"

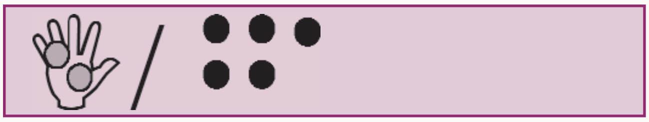
Werden die Begrifflichkeiten mehr/weniger nicht von der Frage nach der Anzahl der Menge unterschieden, können Kinder nicht die inverse Beziehung von mehr/weniger wahrnehmen.

In der Regel scheitern sie bereits im mathematischen Anfangsunterricht. Die Erarbeitung der Zahlzerlegungen wird von ihnen auf Grundlage einer falschen Vorstellung von Zahlbeziehungen nicht mit Verständnis begleitet. Der automatisierte Bezug zum Verhältnis von Ganzem und Teil/Teil kann sich nur schwerlich einstellen.

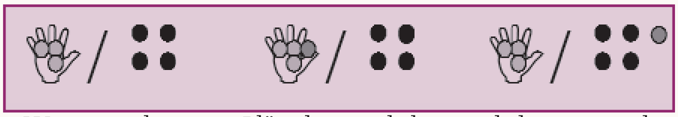
Man kann dieses Verständnis im Rahmen des verdeckten Operierens mit Steckwürfeln oder Plättchen überprüfen. Sieben Plättchen sind auf dem Tisch, jetzt werden drei vom Therapeuten verdeckt und vier bleiben sichtbar liegen.

Die Antwort auf die Frage, „Wie viele Plättchen sind unter meiner Hand verborgen?", kann von diesen Kindern häufig nur ermittelt werden, wenn sie diese Zahlzerlegung gerade trainiert haben oder nachdem im

Kopf bzw. an den Fingern abgezählt wurde.
Wird anschließend von den verdeckten Plättchen eins zu den sichtbaren heraus geschoben, gelingt der Rückschluss auf die Veränderung der verdeckten Plättchenmenge nicht (von drei/vier auf zwei/fünf).



Es wird neu gezählt. Kinder mit dem oben beschriebenen Verständnis von mehr/weniger können die vorgenommene Mengenveränderung nicht auf Basis des arithmetischen Prozesses kontrollieren. Es ist für sie weder selbstverständlich, dass die Erhöhung der sichtbaren Menge um Eins einen weniger unter der Hand versteckt bedeutet, noch dass jetzt einer mehr zu sehen ist als vorher und es nicht fünf mehr sind, weil insgesamt fünf Plättchen zu sehen sind.
Wenn die Unterscheidung zwischen „Wie viele sind es?“ und „Wie viele sind es mehr?“ noch nicht auf Verständnis gestoßen ist und acht „acht mehr“ sind als sieben, kann der Zahlaufbau um plus eins und damit der Beziehungsaspekt der Zahlen zueinander nicht erkannt werden. Es ergibt sich eine prinzipielle Schwierigkeit, Geübtes auf andere Zahlbeziehungen zu übertragen. Die Schlussfolgerung, dass die Erhöhung des Ganzen um ein Plättchen (von sieben auf acht), bei der Aufteilung in zwei Teile, eine Änderung um plus eins bei einem der beiden Teile zur Folge hat (von drei/vier auf vier/vier oder drei/fünf), ist ihnen nicht möglich.



Waren vorher vier Plättchen sichtbar und drei unter der Hand verborgen, müssen es jetzt, bei weiterhin vier sichtbaren Plättchen, vier verdeckte Plättchen sein oder fünf Plättchen sind zu sehen, dann sind weiterhin drei verdeckt. Wenn diese Voraussetzungen in der Beurteilung von Anzahlen nicht gefestigt sind, ist das logische Erschließen des Zahlaufbaus nicht möglich und kann auch nicht für das Operieren mit Quantitäten genutzt werden.
Bei der Addition sind dann Rückschlüsse aus der Anzahlveränderung bei Summanden auf Änderungen im Wert der Summe nicht naheliegend. Ableitungen aus Tranfers um +1 oder −1 können nicht als Rechenerleichterung herangezogen werden, weil diese Einsichten gar nicht vorhanden sind (z. B. $3 + 4 = 7$, dann gilt: $3 + 5 = 8$ / $4+4=8$ und $2+4=6$ / $3+3=6$).
Auch die Subtraktion in ihrer Bedeutung als Wertausdruck für Differenzen gerät schnell zum Objekt der Verzweiflung, wenn die mathematische Bedeutung von mehr/weniger unverstanden bleibt. Nach $8 - 3 = 5$ wird $8 - 2$, $8 - 4$ und $8 - 5$ im Zweifelsfall neu gerechnet.

Es besteht die Gefahr, dass diese Kinder eine Vielzahl subjektiver Lösungsstrategien entwickeln, um der Anforderung nach dem richtigen Ergebnis entsprechen zu können. Die Mathematik wird so zu einem denkbar mühseligen Arbeitsfeld.

Schulbuchmaterial im Anfangsunterricht –

Stolpersteine beim Erlernen der Mathematik

S. Raming und K. Rochmann, Osnabrück

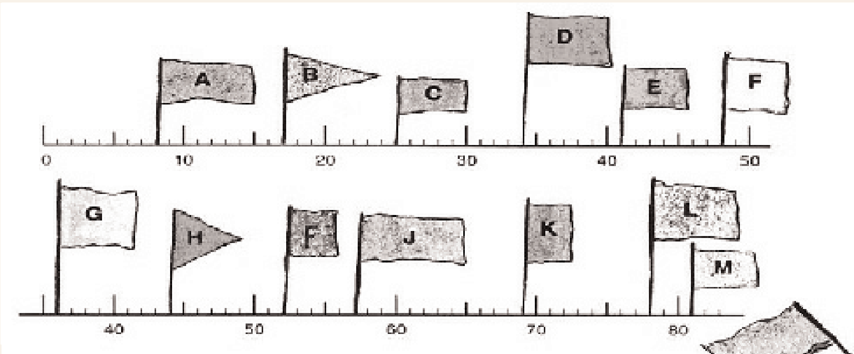
In Gesprächen mit Lehrkräften und Schulleitungen, die wir im Rahmen von Fortbildungen und Kontakten während einer Lerntherapie führen, kommt häufig die Frage nach geeignetem Schulbuchmaterial für den mathematischen Anfangsunterricht auf den Tisch. Gerade im Bemühen, fehlerhafte mathematische Gedanken bei den Kindern nach Kräften zu vermeiden, wird das Thema Schulbuch oft engagiert diskutiert. Der Spannungsbogen reicht von „möglichst viele Freiräume bei Rechenwegen eröffnen“ bis hin zu „möglichst strukturierte Vorgaben mit vielen Übungen“.
Diese Debatte hat zwei Seiten: Einerseits gilt für jedes Material, es bleibt schlicht ein Material und damit lediglich ein *Hilfsmittel beim Erklären*, auch bei noch so liebevoller Präsentation. Keine Erklärung kann durch das Material ersetzt werden, denn letztlich hängt es vom Vorwissen des Kindes ab, worauf es sein Augenmerk am Material richtet und wie es das Wahrgenommene interpretiert. Anderseits haben wir in unserer lerntherapeutischen Arbeit die Erfahrung gemacht, dass Schulbücher Darstellungen und Übungen enthalten können, die durchaus eine Quelle für fehlerhafte mathematische Gedanken eines Kindes sind. Einige der gezeigten Veranschaulichungen und Aufgabenstellungen können mathematische Irrtümer anregen bzw. verfestigen.
Um diese Überlegungen handfester zu machen, greifen wir uns Materialien zum Thema Vorgänger/Nachfolger und zum Zahlaspekt heraus, die wir einmal kritisch unter die Lupe nehmen wollen.

Vorgänger und Nachfolger – ist die Zahlreihenfolge das Alphabet der Mathematik?

Ein beliebtes Übungsmaterial ist der Zahlenstrahl. Er ist in fast jedem Schulbuch anzutreffen und dient der Orientierung im erweiterten Zahlenraum. Wir greifen hier auf das Mathematikbuch „Leonardo Mathematik 2“ von 2001 zurück (Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt a. M.).

Nun mag als Einwand kommen, dass dieses Schulbuch nicht mehr aktuell sei. Das stimmt nur zum Teil, denn es wird noch an vielen Schulen verwendet. Außerdem wollen wir, den Blick im Umgang mit Lehrwerken schärfen und in diesem Artikel Hilfestellungen für Kriterien anbieten , die auf anderes Material übertragbar und daher zeitlos sind.

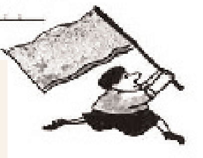
Im Kapitel „Zahlen und ihre Nachbarn“ geht es um das Thema Vorgänger und Nachfolger (S. 17). In dieser Einheit sind die Schüler aufgefordert, anhand eines Zahlenstrahls, der an vorgegebenen Stellen mit Buchstabenfähnchen versehen ist, jedem Fähnchen das richtige Zahlsymbol zuzuordnen. Der Zahlenstrahl ist dafür beginnend mit der Zahl „0“ wie ein Zollstock unterteilt, jeder zehnte senkrechte Strich ist länger und mit der entsprechenden Zehnerzahl untertitelt. Die Fragestellung lautet: „Welche Zahlen gehören zu den Buchstaben?“ Ein Beispiel ist angeführt: „Schreibe so: A: 8, B: __“.



Bei genauerer Betrachtung wird in der gewählten Abbildung eine Analogie von Zahlen und Buchstaben nahe gelegt. Die Zahlen sind entsprechend den Buchstaben des Alphabetes in einer Reihenfolge geordnet, die sich gerade nicht auf das Kriterium der Anzahl bezieht. Die Zahl „acht“ unterscheidet sich in dieser Darstellung von „17“ lediglich durch ihre Position. Jeder Hinweis auf eine unterschiedliche Mächtigkeit fehlt. Der für ein Verständnis wichtige Gedanke, dass „acht“ ein Teil von „17“ darstellt, wird gar nicht angesprochen und damit der falsche Gedanke nahegelegt, dass sich die Zahlen nur durch ihre Reihenfolge unterscheiden.Weiter ist einzuwenden, dass die Zahl acht nicht der Strich auf dem Zahlenstrahl ist, den das Fähnchen „A“ markiert. Gekennzeichnet ist hier der neunte Strich und damit eine ordinale Positionsbestimmung. In diesem Stoffgebiet sollen allerdings nicht Übungen zum ordinalen Zahlaspekt thematisiert werden, vielmehr geht es laut Buch darum „die Zahlen der Größe nach anzuordnen.“ (Lehrerband). Doch hier wird gar nicht mit dem operiert, was am Zahlenstrahl die Anzahl veranschaulicht, der Länge (oder genauer gesagt: dem Abstand von null) – stattdessen wird sich mit der Position der Zahl in der (Zahlwort-)Reihe beschäftigt.

Zahlen nach ihrer Größe zu ordnen schließt jedoch eine Betrachtung unter dem ordinalen Aspekt aus: der neunte Strich ist genauso „groß“ wie der 18. Strich. Beide Striche sind von der Seite ihrer Anzahl aus betrachtet gleich: sie sind jeweils einer. Das Ordnen nach „Größe“ ist sachlich gesehen gar nicht machbar. Der ordinale Aspekt unterscheidet sich gerade von dem kardinalen Aspekt durch das Moment der Anzahl, der Mächtigkeit einer Zahl. Anders ausgedrückt, wer die als „Vorübung“ bezeichnete Arbeitseinheit mathematisch richtig durchführen soll, muss sich das Stoffgebiet eigentlich bereits angeeignet haben.

Für andere Schüler legt dieses Arbeitsblatt Irrtümer und Ungereimtheiten nahe, denn selbst unter ausschließlicher Betrachtung der Reihenfolge der Striche auf dem abgebildeten Zahlenstrahl (ordinal) taucht ein Problem auf: dem neunten Strich (mit dem Fähnchen „A“) soll das Zahlsymbol „8“ zugeordnet werden. Kinder, die sich nicht erschließen können, dass dies eine Folgewirkung davon ist, dass unter dem ersten Strich die „0“ steht, mögen hier individuelle Erklärungen finden wie: „Ich zähle die Striche, das sind neun, und für das Fähnchen muss ich eins wieder zurückzählen, also acht.“ oder: „Den ersten Strich beim Zahlenstrahl darf ich nicht mitzählen, der zählt gar nicht“. Aus diesen Ungereimtheiten können sich beim Rechnen Schwierigkeiten in der Bestimmung des Zählausgangspunktes ergeben, die sich bei zählenden Rechnern in Fehlern um minus eins bei der Addition bzw. um plus eins bei der Subtraktion äußern.

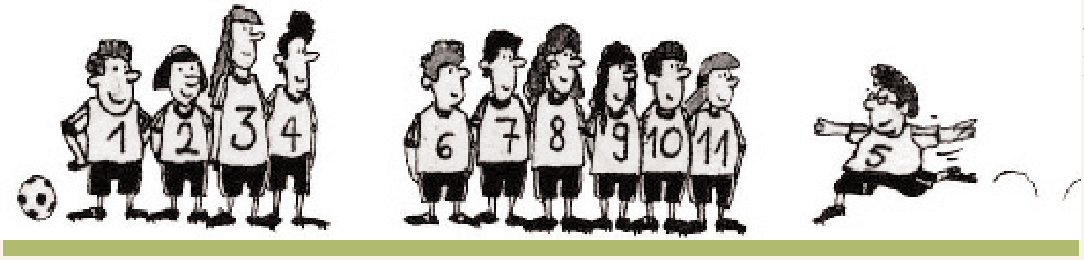


Doch damit nicht genug. Auch für die mathematische Kenntnis von Vorgänger und Nachfolger wird hier Missverständnissen der Weg bereitet. Die Anschauung vermittelt ein rein ordinales Verständnis von Vorgänger und Nachfolger: Der Strich vor dem Fähnchen „A“ wird als „Vorgänger“ von acht bezeichnet. Vorgänger und Nachfolger werden nicht als anzahldefinierte Elemente dargestellt, die sich ausschließlich aus dem Verhältnis zu ihrer Bezugszahl um plus eins (Nachfolger) bzw. um minus eins (Vorgänger) bestimmen. Beim Zahlenstrahl werden Kardinalzahlen über Vielfache der genormten Einheit der Länge eins dargestellt. Vorgänger/Nachfolger sind am Zahlenstrahl dimensionierte Größen/Längen, jeweils unterschieden um −1/+1 der Grundeinheit.

Und schließlich fügt sich noch eine weitere Schwierigkeit an: Welcher Strich ist der Strich vor der „8“? Ist mit „vor“ der zehnte Strich (die Zahl „9“), der achte Strich (die Zahl „7“) oder gar irgendeiner der ersten acht Striche gemeint? Alle Varianten sind möglich, denn „vor“ wie „nach“ sind relative Präpositionen. Es ergibt sich also nicht zufällig immer wieder das Problem, dass von rechenschwachen Kindern der Vorgänger von „acht“ mit „neun“ und der Nachfolger mit „sieben“ angegeben wird bzw. dass mit mehr oder weniger Glück die Lösungszahl geraten wird. „Vorgänger“ und „Nachfolger“ sind für diese Schüler Zuordnungen, die sich bei so viel Unklarheit letztlich der Autorität der Lehrkraft verdanken.

Zahlen nach ihrer Größe sortieren – was ist damit bloß gemeint?

In dem zweiten Beispiel, das wir uns herausgreifen wollen („Leonardo 2“, S. 17) sollen die Kinder eine Reihe angegebener Zahlen der Größe nach sortieren.



Hier setzt das zugehörige Bild den Nominalaspekt (Zahlen ohne Hierarchiebildung) mit dem Kardinalaspekt gleich. Es zeigt neun Kinder in einer Reihe nebeneinander. Auf ihrem T-Shirt steht jeweils ein Zahlsymbol, von links angefangen die Zahlen von „1“ bis „4“, dann eine kleine Lücke und weiter geht es mit den Zahlsymbolen von „6“ bis „11“. Ein Kind mit der Zahl „5“ auf dem T-Shirt kommt von rechts herangelaufen. Die Aufgabenstellung lautet: „Ordne der Größe nach“.

Als Erstes möchte man den Schreiber aus dem Team Leonardo ganz spontan fragen: „Meinen Sie *die Kinder,* die der Größe nach geordnet werden sollen?“ Wenn diese gemeint sind, dann gibt es wirklich einen Handlungsbedarf zu den gezeichneten Vorgaben, da die abgebildeten Kinder nicht nach ihrer (Körper-) Größe sortiert stehen.

Zweitens wäre der Hinweis angebracht, dass einer Nominal- bzw. Ordinalzahl allenfalls die Mächtigkeit eins zugeordnet werden kann (sie bedeutet ein Zahlwort bzw. eine Position). Damit gibt es zwar die Möglichkeit, dass sich die Kinder gemäß der Nummern Position ihrer Nummern in der Zahlwortreihe aufstellen, diese Zahlen unterscheiden sich jedoch gar nicht durch ihre Mächtigkeit (denn alle sind eins). Wir wollen darauf aufmerksam machen, dass sich ein Einordnen des heraneilenden Kindes mit der „5“ zwischen Kind „4“ und Kind „6“ in dieser bildhaften Darstellung ausschließlich aus der Konstruktion der Zahlenreihe ergibt, aus der Abfolge unserer Zahlverschriftungssymbole.

In der Förderdiagnostik stellen wir den Kindern gerne folgende Frage: „In einer Straße stehen zehn Häuser. Herrn Reich gehören das dritte und das siebte Haus. Wie viele Häuser besitzt Herr Reich in dieser Straße?“ Eine häufige Antwort lautet: „Herr Reich besitzt zehn Häuser. Drei und sieben sind zehn.“ Längere Zeit waren wir der Meinung, dass den Kindern im Unterricht etwas entgangen sei. Heute sind wir in vielen Fällen der Auffassung, dass die Kinder diese Kenntnis auch Schulbüchern entnommen haben können.

Fazit – die richtige mathematische Einsicht stellt sich eher zufällig ein!

Die kurze Sichtung ergibt eine ernüchternde Bestandsaufnahme. Das gezeigte didaktische Material und seine Aufbereitung legt eine Verwechslung, respektive Gleichsetzung, der verschiedenen Aspekte einer Zahl nahe, die Kinder doch gerade zu unterscheiden lernen sollen, um einen verständigen Einstieg in die Welt der Zahlen zu finden. Außerdem werden mögliche Missverständnisse im Hinblick auf Begrifflichkeiten wie Vorgänger und Nachfolger einer Zahl initiiert. Als eine wichtige Orientierungshilfe für Lehrende und Lernende im Unterricht gedacht, schafft die Darstellung und ihr Bearbeitungsauftrag eine Basis für ein falsches Verständnis in ganz grundlegenden mathematischen Auffassungen, das dann die Grundlage für weitere Probleme im Rechenerwerb sein kann. Wer mit diesem Material zurecht kommen will, muss richtiggehend resistent sein gegen die falschen Eindrücke, die ihm nahe gelegt werden. Dafür muss ein Schüler als Voraussetzung allerdings bereits ein Zahlverständnis mitbringen, das ihm ja eigentlich erst vermittelt werden soll. Bei dem Einsatz von Arbeitsblättern ist deshalb wichtig, wie ein Material besprochen wird. Will man möglichen Irrtümern auf die Spur kommen, bleibt einem die Nachfrage, wie das Material und die dazugehörige Arbeitsanweisung verstanden wurde, nicht erspart. Dieser Grundsatz gilt für alle Schulbücher und Übungsmaterialien. Kein Material spricht für sich!

Für denjenigen, der mag, ein Vorschlag zur Überprüfung des Verständnisses von Vorgänger und Nachfolger: Man nehme vor den Augen des Kindes eine unübersichtliche Anzahl Steckwürfel (Plättchen oder Holzklötzchen). Dann verdecke man sie mit einem Tuch und fordere das Kind auf, die Menge so zu verändern, dass sich anschließend der Nachfolger der unbekannten Zahl unter dem Tuch befindet. Ergreift das Kind einen Steckwürfel und schiebt ihn mit unter das Tuch, ist der Nachfolger als Mengenveränderung $n + 1$ (Inkrement) verinnerlicht. Diese Übung lässt sich gleichfalls mit der Fragestellung nach dem Vorgänger verknüpfen. Der Vorgänger $n - 1$ (Dekrement) ist leicht zu haben: einen Steckwürfel von der eingangs verdeckten Menge unter dem Tuch wieder hervorholen.

Zum Abschluss noch ein besonders „gelungenes“ Beispiel für eine fehlende Trennschärfe in der Zahlbegriffsbildung, gesehen in „Mathebaum 1“, S. 54 (Verlag Schroedel, Hannover 1994).

Die Nachfrage liegt auf der Hand:
„Was passiert, wenn die Papierhüte vertauscht werden?“

Ferienkurs in den Sommerferien

- **Quadratische Gleichungen**
- **Grafische Lösung einer quadratischen Gleichung**
- **Lösung der quadratischen Gleichung durch quadratische Ergänzung**
- **Lösung der quadratischen Gleichung mit der p, q-Formel**
- **Quadratische Funktionen**
- **Grafische Darstellung quadratischer Funktionen und Scheitelpunktberechnung**

Die Themen werden in Kleingruppen behandelt.
Übungsmaterial wird bereitgestellt.
Nähere Informationen: Telefon 089- 5 23 31 42

Elternintensivschulung

für alle jene, die aus geografischen oder sonstigen Gründen kein Institut besuchen können

Zielgruppe: *Eltern von Kindern mit grundlegenden Schwierigkeiten beim Verstehen des mathematischen Schulstoffs. Eltern , welche in der Lage sind, Zeit und Energie aufzubringen, sich in systematischer Form in die Verständnisprobleme ihrer Kinder hineinzudenken, um sich so für sinnvolles Üben geeignetes Rüstzeug zuzulegen.*

Ziel: *Eltern sollen befähigt werden, beim Üben auftretende Schwierigkeiten Ihrer Kinder zu lokalisieren, das Üben kindlicher Möglichkeiten gemäß zu effektivieren, gängige Fehlertypen zu erkennen und therapeutische Gesichtspunkte zu berücksichtigen.*

Termine: Samstag, 23.06.07
Samstag, 24.11.07

Weitere Termine bitte im Institut erfragen.

Themen Workshop *in den Sommerferien in der Woche vom* 03.09. bis 07.09.2007

Die Uhr: was zeigt sie ? Uhrzeit, Zeitpunkt, Zeitspanne

Elementare Geometrie:
- das Geodreieck
- das Koordinatensystem
- Senkrechte, Parallelen, Strecken, Geraden
- Anwendung

Platzhalter:
- viel verhasst, kaum gekonnt. Neue Lösungswege

Maßeinheiten:
- schätzen, messen, umrechnen, anwenden

Jedes Thema umfasst 3 x 2 Stunden, in Kleingruppen.
Therapeutisches Übungsmaterial wird bereitgestellt.
Nähere Informationen: Telefon 089- 5 23 31 42

MATHEMATISCHES INSTITUT ZUR BEHANDLUNG DER RECHENSCHWÄCHE/DYSKALKULIE

DIAGNOSE • BERATUNG • THERAPIE

Brienner Straße 48,80333 München

Telefon 089 / 5 23 31 42
Telefax 089 / 5 23 42 83

Internet: www.rechenschwaeche.de
e-mail : institut@rechenschwaeche.de

Telefonsprechstunde:

Mo - Do 11^{00} bis 15^{30} Uhr
Fr 12^{00} bis 15^{30} Uhr

Therapieeinrichtungen des Mathematischen Instituts in der Umgebung

86150 Augsburg,
Stettenstr. 2, Tel. 0821/5082666

81245 Aubing,
Ubostr. 18, Tel. 089/5233142

83646 Bad Tölz
SPZ, Alter Bahnhof,
Tel.089/5233142

85221 Dachau,
Dr. Engert-Str. 9, Tel. 089/5233142

85421 Erding
Schule am Grünen Markt

83607 Holzkirchen
Hauptschule

85551 Kirchheim - Heimst.,
Maria-Glasl-Str. 16, Tel. 089/5233142

6330 Kufstein,
SPZ Sozialpädagogisches Zentrum, Josef-Egger-Str. 2
Tel. 0512 / 580 441

86899 Landsberg,
Hauptplatz 175,
Tel. 089/5233142

83022 Rosenheim,
Stollstr. 10, Tel. 08031/15631

82319 Starnberg Grundschule
Ferdinand-Maria Str.1
nähe S-Bahnhof Nord

85716 Unterschleißheim,
Ganghofer Str. 5, Tel. 089/5233142

Aufbaukurse

für die Unter- und Mittelstufe Gymnasium & Realschule

MATHEMATIK - EIN ROTES TUCH

Mathe-Aufbaukurse für die Sekundarstufe I.

Mathematisches Denken lernen • Zusammenhänge erkennen

Wir führen einen Test zur Ermittlung des individuellen Lernstands durch. An Hand der Defizite wird das passende Arbeitsprogramm mit den entsprechenden Modulen zusammengestellt. Wir bilden 2er- oder 3er Gruppen von Schülern mit ähnlichen Schwierigkeiten.

Module der Aufbaukurse

Arithmetik:
Zahlaufbau, Stellenwertsystem, Grundrechenarten, Rechengesetze (D-Gesetz), Bruchrechnen,Negative Zahlen, Binomische Formeln, Faktorisieren, Potenzen,Wurzeln

Gleichungen:
Umgang mit Termen, Lineare Gleichungen, Bruchgleichungen, Gleichungssysteme, Quadratische Gleichungen, Wurzelgleichungen

Funktionen:
Lineare Funktionen, Proportionalitäten,Quadratische Funktionen, Potenzfunktion,Wurzelfunktionen

- Mittels der qualitativen Testauswertung setzen wir an dem Punkt an, wo das Unverständnis beginnt, nicht einfach am aktuellen Stoff
- Wir konzentrieren uns auf das Wesentliche
- Die Verbindungen zwischen den Stoffgebieten mehrerer Schuljahre werden aufgezeigt => ein mathematischer „Roter Faden“
- Also kein hektisches Üben für die nächste Schulaufgabe, stattdessen weniger Pauken bei dauerhaftem Schulerfolg