Kopf und Zahl

JOURNAL

des **Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie** e.V.
in Zusammenarbeit mit den **Mathematischen Instituten zur Behandlung der Rechenschwäche**

9. AUSGABE, 2008

www.dyskalkulie.de

Michael Gaidoschik,
Institut zur Behandlung der Rechenschwäche Wien

Umrechnen von Maßeinheiten:

Sicherheit durch Begreifen

Anregungen für den Klassenunterricht und die Förderarbeit mit „rechenschwachen“ Kindern

Das „Umrechnen“ oder „Umwandeln“ von Maßeinheiten wird von nicht wenigen Kindern als eine Art Glücksspiel betrieben. Das Glücksspiel existiert in zwei Fassungen, dem Fortgang der Schulmathematik entsprechend: In der vierten Schulstufe heißt es „Nullen anhängen oder streichen“. Ab Mitte der fünften wird daraus „Komma verschieben“. Was gleich bleibt, ist das Prinzip der weitgehenden Zufälligkeit: Ob (und wie viele) Nullen nun „angehängt“ oder „gestrichen“ werden; ob (und um wie viele Stellen) das Komma nun „nach vorne“ oder „nach hinten“ verschoben wird – das wird von den hier besprochenen Kindern scheinbar willkürlich entschieden (siehe die angeführten Fehlerbeispiele).

Tatsächlich gilt für diese Kinder beim Umrechnen: Sie wissen nicht, was sie tun. Umrechnen wird als unverstandenes Regelwerk betrieben – ein „Spiel mit Symbolen“ ohne weitere Bedeutung. Ein klares Wissen, warum einmal „Nullen angehängt“, dann wieder „Nullen gestrichen“ werden, fehlt; entsprechend hoch ist die Fehlerquote.
In aller (hier leider unabdingbaren) Kürze wollen wir im Folgenden einige Anregungen dafür geben, wie das Umrechnen auch mit „rechenschwachen“ Kindern erfolgreich erarbeitet werden kann.

Anregungen, die mit (aus eigener Erfahrung gewonnener) Sicherheit in der Einzel- und Kleinstgruppen-Förderung umgesetzt werden können, vielleicht aber doch auch (wenigstens zum Teil) im Klassenunterricht. Schließlich gilt auch in diesem Bereich: Vorbeugen (nämlich durch „präventiven“ Unterricht) ist besser als „heilen“!

0. Nähere mathematische Voraussetzungen für das Umrechnen

Der Vorgang des Messens, die Ausbildung von Modellvorstellungen zu den wesentlichen Maßeinheiten (siehe unten die Punkte 1 und 2) können und sollen bereits ab der ersten Schulstufe Schritt für Schritt erarbeitet werden.
Das spätere Umrechnen dieser Maßeinheiten setzt aber darüber hinausgehend grundlegende Einsichten in unser Dezimalsystem voraus, die über mehrere Schulstufen hinweg geklärt und gefestigt sein müssen:

1 km 350 m = 1350 km

400 dm = 40 cm   0,35 dm = 3,5 m

Umrechnen als „Glückspiel“: Beispiele für (gar nicht so seltene) Fehler im Umgang mit Maßeinheiten

weiter Seite 2

INHALT

• Das Kind muss das „Bündelungsprinzip“ unseres Stellenwertsystems verstanden haben. Es muss also wissen, dass 1 Zehner nichts anderes ist als die „Bündelung“ von 10 Einern zu einer neuen, größeren Werteinheit. Und dass umgekehrt 1 Zehner jederzeit in 10 Einer „getauscht“ werden kann; dass 1 Hunderter nichts anderes ist als die Bündelung von 10 Zehnern usw.

• Das Kind muss auf dieser Grundlage den „multiplikativen“ Gehalt der Stellen durchschaut haben und anwenden können, das heißt:

- Es muss wissen, dass 1 Zehner genau 10 mal so viel ist wie 1 Einer, 1 Hunderter genau 10 mal so viel wie 1 Zehner, aber 100 mal so viel wie 1 Einer usw.

- Es muss wissen, dass deshalb das Multiplizieren mit 10/100 ... bzw. das Dividieren durch 10/100 ... eine tatsächlich „kinderleichte“ Angelegenheit ist:

- Beim Multiplizieren mit 10 werden aus Einern Zehner, aus Zehnern werden Hunderter, kurz: „alles rückt um eine Stelle nach vorne/links“.

- Beim Multiplizieren mit 100 rückt „alles um zwei Stellen nach vorne“ usw.

- Gerade umgekehrt beim Dividieren durch 10/100 ...

Vor Tipps wie „mal 10 heißt einfach nur eine Null anhängen“ muss schon alleine deshalb gewarnt werden, weil gerade die getreue Befolgung dieses Tipps bei vielen Kindern ab der 5. Schulstufe zu Fehlern im Umgang mit dem Komma führt: 3,5 mal 10 ist eben nicht 3,50 (Null angehängt!), sondern 35!

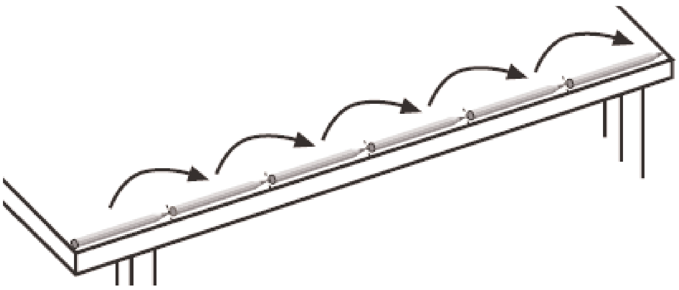
1. Erarbeitung des Messens als „immer wieder die gleiche Einheit nehmen“

Nicht wenige Kinder haben (wenn überhaupt) ein rein äußerliches Verständnis vom Messen, etwa in der Weise: „Ich lese an einem Maßband eine Zahl ab.“ (Oft genug wird dann bereits die Angabe der Maßeinheit als überflüssig empfunden: „Der Tisch ist 80 breit!“)

Fürs Umrechnen ist ein tieferes Verständnis des Messens nötig. Dieses kann am einfachsten wohl im Bereich des Messens von Längen erarbeitet werden, muss aber später auch auf die anderen Messbereiche (Massen und Flüssigkeitsmengen) übertragen werden.

Im Bereich von Längen läßt sich Messen in etwa so beschreiben: Ich stelle fest, wie oft eine bestimmte, vorher gewählte Länge (die „Maßeinheit“) sich innerhalb der Länge, die ich messen möchte, hinter einander legen lässt; wie oft also diese Einheit „hineinpasst“.

„Der Tisch ist 6 Bleistifte lang“:
Messen als „immer wieder dieselbe Länge anlegen“



Die Maßeinheit ist dabei grundsätzlich frei wählbar. Und es empfiehlt sich durchaus, beim Messen nicht sofort nur metrische Einheiten (Meter, Dezimeter ...) zuzulassen: Ich kann das Schreibheft mit „Radiergummi-Längen“ abmessen, das Zimmer mit Schritten oder auch „Fußlängen“.

Bereits hier kann und soll besprochen werden, dass ich beim Messen beides kennen muss: die gewählte Maßeinheit – und die Zahl, die mir sagt, wie viele solche Maßeinheiten „hineinpassen“. Wenn ich weiß, dass ein „Zimmer 5 lang ist“, weiß ich gar nichts. „5 Schritte lang“ – das sagt schon um einiges mehr aus; aber sind es 5 große Schritte oder 5 kleine Schritte?

Mit solchen Fragestellungen kann und soll dann auch ein Verständnis dafür erarbeitet werden, warum eindeutig festgelegte Einheiten wie „Meter“ oder „Zentimeter“ sinnvoll sind.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie. eV.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:
Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund
Rudolf Wieneke, Berlin
Layout und Satz: Illustration + Grafik, Tanja Gnatz, Gröbenzell

2. Erarbeitung von Modellvorstellungen der Maßeinheiten

Diese metrischen Einheiten stehen in weiterer Folge beim Messen natürlich im Vordergrund. In einem nächsten Schritt sollten die Kinder – noch fern von jedem Umrechnen – Modellvorstellungen zu den wesentlichen Maßeinheiten entwickeln und festigen können. Tatsache ist, dass viele Kinder, die beim Umrechnen Schwierigkeiten haben, auch gar keine klaren Vorstellungen davon haben, wie lang denn nun 1 Meter oder 1 Zentimeter ist (Noch deutlicher sind diese Defizite in der Regel im Bereich der Massen-Einheiten).
Was hier zu tun wäre, geht über das Herstellen eines Bezugs zum eigenen Körper und „Merksprüchen“ wie „Ein Zentimeter ist so lang wie ein Fingernagel breit ist“ weit hinaus: Modellvorstellungen prägen sich dadurch ein, dass die metrischen Maßeinheiten immer wieder bewusst *verwendet* werden. Das Kind sollte also immer wieder bestimmte Strecken abmessen, indem es Zentimeter an Zentimeter reiht (und nicht einfach nur an einem Zentimeterband abliest); Meter an Meter reiht (und nicht einfach nur an einem Meterband abliest) …
Und das Kind sollte, in einem zweiten Schritt, immer wieder dazu angespornt werden, vor dem Messen eine Schätzung abzugeben: Wie viele Meterstäbe, glaubst du, passen in die Strecke bis zur Tür? Wie viele Zentimeter-Würfel brauchst du für diesen Bleistift? Durch nachfolgendes Überprüfen mittels Messung und neuerliches Schätzen weiterer Längen werden einerseits die Schätzfähigkeiten geschult, andererseits gerade darüber Modellvorstellungen der Maßeinheiten verfestigt.

3. Ordnen der Maßeinheiten in Analogie zu den Stellen des Dezimalsystems

Parallel zu diesem Vertrautwerden mit den einzelnen Maßeinheiten (und diesen Prozess unterstützend) geht es um das Durchschauen der *Systematik* der Längenmaße. Die Einheiten von Millimeter bis Meter sind in völliger Analogie zu den Stellen des Dezimalsystems konstruiert. Diese Analogie kann jedes Kind begreifen, welches auch das Stellenwertsystem begriffen hat (siehe Punkt 0).
Es soll also – unterstützt von einer Tabelle wie der nebenstehenden – in etwa das Folgende begreifen:

T	H	Z	E
m	dm	cm	mm

- 1 cm ist genau so lang wie 10 mm
  (so wie 1 Z genau so viel ist wie 10 E)
- 1 dm ist genau so lang wie 10 cm
  (so wie 1 H genau so lang ist wie 10 Z)

Oder allgemein:

- 10 von einer Einheit sind genau so lang wie die nächstgrößere Einheit („1 Stelle weiter vorne/links“)

Ebenso gilt:

- 1 dm ist genau so lang wie 100 mm
- 1 m ist genau so lang wie 100 cm

Oder allgemein:

- 100 von einer Einheit sind genau so lang wie die übernächste Einheit („2 Stellen weiter vorne/links“)

Und immer so weiter. Oben stehende Tabelle kann und soll zum gegebenen Zeitpunkt natürlich bis zum km ausgedehnt bzw. auf die Massen- und Hohlmaße übertragen werden. Von besonderer Bedeutung ist es dabei, die „Leerstellen“ in der Systematik deutlich zu machen: Zwischen m und km „fehlen“ zwei Einheiten, wie auch dag (Dekagramm) nicht einfach die „Nachbareinheit“ zu kg darstellt.

4. Grundgedanke „vom kleinen mehr“

Das Umrechnen lässt sich handelnd aus dem Messen mit unterschiedlichen Einheiten heraus entwickeln: Das Kind soll dieselbe Länge (etwa eine Buchkante) einmal mit dm, einmal mit cm abmessen. Wenn es dm verwendet, benötigt es weniger davon; wenn es cm verwendet, benötigt es mehr davon. Das wird in einem „Handlungs-Protokoll“ festgehalten,

z.B.: Länge des Buches = 3 dm = 30 cm

„Umrechnen“ ist also in seiner Grundform nichts anderes als die Überlegung: Wie viele von einer bestimmten Einheit brauche ich zum Abmessen **derselben Strecke**, die bereits einmal, aber mit einer anderen Einheit abgemessen wurde? Was dabei jedes Kind verstehen kann: Wenn ich dieselbe Strecke zweimal messe, einmal mit einer größeren, dann mit einer kleineren Einheit – dann benötige ich **von der kleineren Einheit mehr,** umgekehrt **von der größeren Einheit weniger.**

Diese Überlegung sollte durch geeignete Aufgabenstellungen gewissermaßen „automatisiert“ werden: Man könnte diesen Schritt „Umrechnen ohne Zahlen“ nennen.

Einige Anregungen:

- Fragen wie die oben angesprochene, also z.B. : „Du misst dein Zimmer einmal mit Fußlängen, einmal mit Schritten ab. Wovon brauchst du mehr?“
- Analog mit metrischen Einheiten: „Du misst die Tischkante einmal mit cm, einmal mit dm: Wovon brauchst du mehr?“

5. Umrechnen als mehrschrittiges, geplantes Vorgehen

Ist das bisher Besprochene abgesichert, dann ist es nur noch ein kleiner Schritt zum eigentlichen Umrechnen.
Erarbeitet werden sollte ein Schritt-für-Schritt-Vorgehen, bei dem alle bisher erarbeiteten Voraussetzungen zusammengeführt werden:

1. Schritt: *Klarheit über die Aufgabenstellung schaffen*

Eine beliebige Umrechenaufgabe, z.B. :
600 cm = _____ dm,
muss zunächst einmal in der oben dargestellten Weise verstanden sein: Eine Strecke wurde mit 600 cm gemessen; ich will herausfinden, wie viele dm dieselbe Strecke lang ist.

2. Schritt: *Verhältnis der Einheiten überprüfen*

Geprüft werden muss also: Wandle ich in eine kleinere Einheit um – oder aber in eine größere. Dabei kommt dann die oben entwickelte Grundüberlegung zum Tragen: Wenn ich in eine kleinere Einheit umwandle, dann werde ich von dieser kleineren Einheit mehr brauchen. Im gegebenen Beispiel (cm in dm) wandle ich in eine größere Einheit um; von der größeren Einheit brauche ich bestimmt weniger.

3. Schritt: *Was heißt das für die Anzahl der Einheiten?*

Wenn ich (wieder im gewählten Beispiel) weiß, dass ich von den dm weniger brauche, ist auch schon klar, dass die Anzahl (hier: 600) verkleinert werden muss.

Die Kante des Ordners einmal mit dem Stift, einmal mit der Zündholzschachtel abmessen: Was passt öfter rein?

Der Rest ist Einsicht ins Stellenwertsystem:
dm ist 10 mal so lang wie cm, daher brauche ich 10 mal so viele cm wie dm. Daraus folgt umgekehrt: die Anzahl der cm muss durch 10 geteilt werden, um die Anzahl der dm zu erhalten. Und das ist, siehe Punkt 0, keine Kunst: Durch 10 teilen entspricht einem „Verrücken“ um „1 Stelle nach hinten“, also:

600 cm = 60 dm

Tatsächlich genügt für ein sicheres Umrechnen ein „implizites“ Verständnis der oben dargestellten (indirekten) Verhältnismäßigkeit. Das Kind muss wissen, dass dm im System der Längeneinheiten „um 1 Stelle größer = weiter vorne“ ist als cm; und dass deshalb die Anzahl von dm „um 1 Stelle kleiner“ sein muss als die der cm. Die anspruchsvolle mathematisch-begriffliche Fassung „10 mal so große Einheit, daher ein Zehntel der Anzahl dieser Einheit“ muss also keinesfalls vom Kind selbst explizit formuliert werden können!

6. Automatisierung

Wie jede mathematische Grundfertigkeit muss auch das Umrechnen durch (je nach Kind unterschiedlich intensive) Übungen automatisiert werden, d.h. , die (vom Kind begriffenen) Schritte müssen zur Selbstverständlichkeit werden, ohne großes Grübeln flüssig ablaufen. Mit Blick auf die in vielen Schulbüchern üblichen „Aufgaben-Kolonnen“ muss dabei vor stereotypen Übungsformen gewarnt werden: Sowohl im Interesse eines „Einschleifens“ von Schritten, die in ihrem Zusammenhang begriffen werden müssen, als auch im Interesse einer Lernzielkontrolle (ob nämlich dieses Begreifen bei einem Kind tatsächlich bereits stattgefunden hat), müssen Übungsformen gewählt werden, die eine bloß „mechanische“ Erledigung unmöglich machen.

7. Schlussbemerkungen

Ein Kind, das wie beschrieben mit Verständnis an eine Umrechenaufgabe wie z. B. **6000 g = _____ kg** herangeht, kann im Grunde nur noch an einer Sache scheitern: Dass es nicht weiß, ob etwa 1 kg nun 100 oder 1000 g sind, ob es also durch 100 oder durch 1000 dividieren (bzw. 2 oder 3 Stellen nach hinten rücken) muss.

Zum sicheren Umrechnen gehört neben dem Verständnis also auch das sichere Wissen um die „Umrechnungszahlen“. Solange dieses noch nicht vorhanden ist, spricht nichts dagegen, eine für den jeweiligen Maßbereich erstellte Tabelle der Einheiten (s. o.) auch als Hilfsmittel beim Umrechnen verwenden zu lassen. In einem nächsten Schritt sollte das Kind freilich ermutigt werden, eine vergleichbare Tabelle jeweils selbst zu erstellen; gerade die Längenmaße werden hier aufgrund der

„Vollständigkeit“ der Einheiten von mm bis m die geringsten Probleme bereiten.

Größere Schwierigkeiten bereiten aufgrund der bereits erwähnten „Lückenhaftigkeit“ die Massen-Einheiten von g bis kg. Die Überwindung dieser Schwierigkeiten verlangt (neben der bloßen Gedächtnisleistung) vor allem eine Vertrautheit mit diesen Einheiten: Hier ist also der häufige, bewusste Umgang mit Massen-Maßen, das (spielerische) Abschätzen von Gewichten gefragt. Analoges gilt für mögliche Probleme beim Speichern der Beziehung 1 km = 1000 m (und nicht etwa 100 m). Auch hier wäre zuallererst an der Festigung einer „Modellvorstellung“ zu arbeiten (bei Wandertagen einen Kilometer bewusst „erwandern“, km-Schätzungen auf Grundlage solcher Erfahrungen ...). Darüber hinaus hilft hier oft auch das Bewusstmachen der Analogie

1 Kilo-Meter = 1000 Meter

1 Kilo-Gramm = 1000 Gramm

und nicht wenige Kinder merken sich mit Freude und Stolz, dass „kilo“ nichts anderes ist als das griechische Wort für „tausend“.

157 – 47 = 9000

Wenn schematisches Rechnen mathematisches Verständnis ersetzt

Katja Rochmann, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen, Dr. Michael Wehrmann, Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Jan-Frederik, sechste Klasse Realschule, ermittelt im schriftlichen Ergänzungsverfahren als Wert der Differenz 157 – 47 nacheinander die Ergebnisse „000“, „100“ bzw. „9000“.

Rechnung Nummer eins

Zunächst bearbeitet Jan-Frederik die Einer: „Von 7 bis 7 geht nicht, weil die obere Zahl größer sein muss. Dann von 7 bis 17 und das sind 10. ‚0‘ notiert, Übertrag von ‚1‘ an der Zehnerstelle.“
Anschließend sind die Zehner dran: „1 + 4 = 5. Von 5 bis 5 geht nicht, dann von 5 bis 15, das sind 10. ‚0‘ notiert, Übertrag von ‚1‘ an der Hunderterstelle.“
Und schließlich die Hunderter: „1 bis 1 geht nicht, dann von 1 bis 11, das sind 10. ‚0‘ notiert. Fertig. Den Übertrag brauche ich nicht notieren, weil es eine Minusaufgabe ist und oben nichts an der Tausenderstelle steht.

Erstes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 1\;5\;7 \\ -\ {}_1 4_1 7 \\ \hline 0\;0\;0 \end{array}$$

Jan-Frederiks erstaunter Kommentar angesichts des Ergebnisses: „Da ist ja gar nichts raus gekommen, das kann nicht sein! Dafür müsste die Aufgabe doch 157 – 157 heißen …“
An dieser Stelle lassen sich in der qualitativen Analyse bereits wertvolle Erkenntnisse erzielen.

Offensichtlich wurde mit Jan-Frederik das schriftliche Verfahren eingehend geübt. Wert gelegt wurde auch auf die Anwendung des korrekten Vokabulars („Übertrag von 1“ etc.).
Doch eines ist von Jan-Frederik bislang überhaupt nicht nachvollzogen: *was* in diesem Verfahren *warum* passiert. Man kann sagen, das „von-bis-Rechnen“ wurde inhaltsleer eintrainiert und ersetzt bei ihm völlig das Verständnis des Gehalts der schrittweisen Subtraktion.
Offensichtlich sind bei Jan-Frederik rudimentäre operationale Einsichten vorhanden, so kann er den Wert einer Differenz von null der Subtraktion gleicher Zahlen zuordnen (auch wenn er „null“ mit „es kommt nichts raus“ verwechselt). Doch wichtig ist für uns, dass er *im Verfahren* an keiner Stelle auf die Logik der Subtraktion Bezug nimmt.

Lösung Nummer zwei

Jan-Frederik zieht aus seiner obigen Feststellung einen eigenwilligen Schluss: „ … dann schreibe ich die letzte ‚1‘ an die Hunderterstelle.“ Die Hunderterstelle wird von ihm korrigiert von „0“ auf „1“.

Zweites Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 1\;5\;7 \\ -\ {}_1 4_1 7 \\ \hline 1\;0\;0 \end{array}$$

Ein Ergebnis, das sich für den außenstehenden Betrachter nahe der realen Differenz bewegt und zu der Bemerkung „Du hast an der Zehnerstelle falsch gerechnet!“ verleiten könnte. Ein Hinweis, der dem subjektiven Lösungsalgorithmus bei weitem nicht gerecht wird. Auch bei Jan-Frederik bleibt ein Misstrauen bezüglich des erzielten Resultats – wenngleich aus ganz anderen Gründen: „Der Übertrag kommt aber nicht in das Ergebnis“, und er rechnet die Aufgabe noch einmal ganz von vorne. Allerdings schlägt hier keine Kenntnis über die Subtraktion durch, sondern eine reine Verfahrensregel.

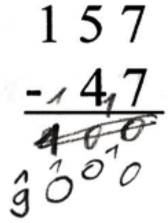
Lösung Nummer drei

Jan-Frederik vollzieht für die drei niederwertigeren Stellen wieder die gleichen Schritte wie bei Lösung Nummer eins. Nach der Notation der „0“ an der Hunderterstelle erfolgt diesmal ein Übertrag von „1“ an die Tausenderstelle, was er im ersten Versuch noch als überflüssig einstufte.
Für die Tausender bemerkt er: „1 bis 0 geht nicht, dann von 1 bis 10, das sind 9. ‚9‘ notiert.“

Drittes Ergebnis:

$$\begin{array}{r} 1\;5\;7 \\ -\;{}_1\;{}_1 4\;{}_1 7 \\ \hline 9\;0\;0\;0 \end{array}$$

Jan-Frederiks Kommentar: „Wenn ich jetzt den Übertrag so aufschreibe, dann geht das ja unendlich so weiter. Da stimmt immer noch etwas nicht. Außerdem ist das Ergebnis viel zu groß. Es ist mehr übrig geblieben, als ich am Anfang hatte. Das geht doch bei Minus nicht!“
Berechtigte Zweifel sind von Jan-Frederik durchaus angemeldet, sie können von ihm jedoch nicht aus der Welt geschafft werden. Auch hier schimmert Verständnis über die Subtraktion durch („Das geht doch bei Minus nicht!“). Da er sich die Logik des Verfahrens selbst nicht erschlossen hat, ist dieses Problem unauflösbar. Der Wert der Differenz von „9000“ bleibt als Resultat auf dem Papier stehen, auch wenn sich bei Jan-Frederik keine Zufriedenheit einstellt.



Seine eingeschränkten rechenstrategischen Kompetenzen führen zu dieser letztlich pragmatischen Entscheidung, denn ein weiteres Lösungsschema ist für ihn momentan nicht greifbar. Ist das Verfahren der schriftlichen Subtraktion gerade geübt, kann der Algorithmus durchaus erfolgreich angewendet werden. Produziert werden richtige Ergebnisse, ohne dass jegliche Einsicht in die Logik des Verfahrens vorhanden ist. In diesem Fall ist die nötige Technik nicht präsent und kann auf Grund fehlender Sachlogik auch nicht hergeleitet werden.

Aus lerntherapeutischer Sicht erscheint es uns dringend nötig, bei der Einführung der schriftlichen Verfahren darauf zu achten, dass auf die Subtraktion als Verminderung einer Anzahl Bezug genommen wird. Selbstverständlich kann über ein „von … bis …“ *die Differenz bestimmt* werden. Doch muss dem Schüler klar sein, dass er diese mit der additiven Ergänzung ermittelt!

Die Erklärung der Überträge ist durchaus nicht trivial bei dem hier angewendeten Verfahren: Man benutzt z. B. einen (vorhandenen!) Zehner des Minuenden für einen Teilschritt bei den Einern („5 bis 2 geht nicht, also 5 bis 12“ – man bestimmt statt 2 – 5 den Wert der Differenz 12 – 5). Der damit *bereits verwendete* Zehner muss für eine korrekte Gesamtbilanz auch abgezogen werden – daher die Merkeins, die den Subtrahenden des Zehners um Eins erhöht und damit die nötige Korrektur auf später verschiebt. Genau das kennzeichnet man mit der „Merkeins“: Ich habe Eins dieser Stelle für eine Subtraktion in der nächst niederwertigeren Stelle bereits benötigt und muss sie deshalb hier dann auch noch abziehen.

Ein Schluss bei schwachen Schülern wäre jetzt fatal: *Weil* dieses Verfahren anspruchsvoll ist, *umgehe* ich am besten die Einsicht in die Logik und kümmere mich *stattdessen* um die strikte Einübung des Verfahrens. Zu welch hilflosen Ergebnissen dies führen kann, konnte man an obigem Beispiel studieren. Der lerntherapeutische Weg geht genau andersherum: Die Schüler benötigen Sicherheit beim Begreifen jedes einzelnen Schrittes, der für die verständige Bewältigung nötig ist.

Und deshalb liegen uns Lerntherapeuten einige Fragen am Herzen, wenn wir Kinder vor uns haben, die beim schriftlichen Rechnen dermaßen hilflos agieren wie Jan-Frederik: Hat solch ein Schüler überhaupt die Voraussetzungen, das Verfahren verständig anwenden zu können? Ist die Logik der Subtraktion als Verminderung einer Anzahl erschlossen? Sind die zwei Arten, eine Differenz zu bestimmen (additive Ergänzung und Subtraktion) als gleichwertig verstanden? Ist das Gesetz von der Konstanz der Differenz geläufig (gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend)? Und ist die Bündelungslogik unseres Dezimalsystems als hierarchische Bilanzierung von Vielfachen der Zehnerpotenzen überhaupt verinnerlicht? Gerade mit dem letzten Punkt haben viele rechenschwache Kinder erhebliche Probleme – und sind deshalb mit der Erarbeitung der schriftlichen Rechenverfahren (noch) vollkommen überfordert.

„Rechnen“ nach getrennten Stellenwerten

Eine Unart, ihr Preis und ein Rat

Wolfgang Hoffmann, MLZ Dortmund/Bochum

Während sich rechenschwache Kinder im Zahlenraum bis 20 noch mit mehr oder weniger richtigen Ergebnissen über die Runden retten (besser gesagt zählen) können, geht ab Mitte der zweiten Klasse im Zahlenraum bis 100 oft nichts mehr - jedenfalls zunächst einmal.

Jede Aufgabe in Einer-Schritten hoch- oder runterzählen, da gelangen Kind und Mutter schnell auf zwei Stunden Hausaufgabenzeit. „Da muss schleunigst Abhilfe her“, und die Lösung ist schnell gefunden - jedenfalls scheinbar.

Seit über einer Stunde sitzt Julias Mutter mit ihrer Tochter wieder an den Mathe-Hausaufgaben, Ende nicht in Sicht. Die Lehrerin hat ihr zwar den Tipp gegeben, nach spätestens 45 Minuten einfach aufzuhören, aber ohne Hausaufgaben weigert sich Julia strikt, in die Schule zu gehen – und richtig müssen sie auch alle sein. Sie würde ihrer Tochter ja gerne zeigen, wie man die Aufgaben untereinander (also schriftlich) lösen kann, aber auf dem letzten Elternsprechtag wurde ausdrücklich darauf hingewiesen, den Kindern dies nicht zu zeigen, was auch völlig richtig ist. Aber schon wieder einen Nachmittag mit Tränen, das hält sie auch nicht mehr durch. Dann kommt ihr der rettende Einfall:

„Julia, ich weiß jetzt, wie es einfacher geht. Pass auf! Du rechnest bei der nächsten Aufgabe ganz einfach Zehner plus Zehner und Einer plus Einer.“

Die Aufgabe lautet:

$$58 + 27 =$$

Julia macht sich ans Werk. Einer und Zehner einer Zahl kann sie schematisch benennen, auch wenn sie nicht weiß, was das quantitativ bedeutet. Nach einer Weile verkündet sie der Mutter stolz, dass sie das Ergebnis hat, die Zahl aber nicht sagen könne. Die Mutter bittet das Kind, die Zahl doch einmal aufzuschreiben. Julia notiert:

$$58 + 27 = 715$$

„Aber Julia, hast du denn nicht gehört, was du rechnen solltest? Das sind ja über 700! Siehst du denn nicht, dass das gar nicht sein kann?“ Nein, Julia siehst dies ganz und gar nicht, sonst hätte sie es kaum hingeschrieben. Diese Frage sorgt nur für eines: Julia bricht in Tränen aus. Sie weiß nicht, was sie falsch gemacht, hat und der Mutter zugehört hat sie auch:

$$58 + 27 =$$

$$5 + 2 = 7 \quad \text{Zehner}$$

$$8 + 7 = 15 \quad \text{Einer}$$

Also:

$$58 + 27 = \overbrace{7}^{Z}\overbrace{15}^{E}$$

Nachdem sich ihre Tochter beruhigt hat, erklärt sie ihrem Kind: „Hier gibt es einen Trick: Wir rechnen besser zuerst die Einer aus. Wenn das über zehn geht, dann schreibst du nur die Fünf auf und merkst dir einen. Dann rechnest du die Zehner aus und tust den einen zu den Zehnern dazu. Hast du das verstanden?“

Das Ergebnis ist nun richtig:

$$58 + 27 = 85$$

Verstanden hat sie aber nichts.

Zwei Tage später: Julia soll eine Subtraktion lösen. Die Aufgabe lautet:

$$81 - 79 =$$

Die Mutter erinnert das Kind: „Denke bitte daran, wie wir es gelernt haben: Erst die Einer und dann die Zehner.“ Julia rechnet die Aufgabe aus und notiert ihr Ergebnis:

81 - 79 = 18

Dieser Fehler dürfte den meisten bekannt sein. Fehlerursache: Stellenwerttrennung:

	81	-	79	=		
	1	-	9	=		„Geht nicht“
Aber:	9	-	1	=	8	„Geht“
Und:	8	-	7	=	1	„Geht auch!“

Bei der letzten Aufgabe ist zudem anzumerken, dass Julia zum einen überhaupt nicht den Aufbau der Zahlen bis 100 verstanden hat und von daher nicht die Nähe der beiden Zahlen entdeckt. Zum anderen hat das Kind die Rechenoperationen nicht verstanden: Sie weiß nicht, dass man beim Subtrahieren die Differenz zweier Zahlen berechnet. Damit ist ihr dann auch der Weg zu ökonomisierenden Rechenverfahren verstellt. In diesem Fall die Anwendung der inversen Operation (79 + ? = 81).

Natürlich bemerkt die Mutter die Schwierigkeiten ihrer Tochter. Sie sieht aber das Problem eher in Verfahrensfragen und nicht in einem grundlegenden Unverständnis, weshalb sie immer wieder neue Schemata auf den Tisch bringt, die Julia dann irgendwann alle durcheinanderwirft. Ein Blick in Julias nächste Klassenarbeit spricht Bände:

Klar, das gibt’s immer mal wieder; die Kinder verwechseln das Rechenzeichen. Spricht man das Kind darauf an, und es kommt die Antwort „Ups!“, dann ist die Sache klar - eine Unkonzentriertheit. Bei Julia ist das nicht so. Sie behauptet steif und fest, dass sie „minus gerechnet“ hat. Kann das wirklich sein?

Es kann. Und mit dem bisher Ausgeführten ist die Sache gar nicht mal so schwer zu erklären. Anhand der ersten Aufgabe stellen wir Julias Subtraktionsverfahren vor. Wie bei Mama geübt, beginnt sie mit den Einern:

100 - 26 = ____

0 - 6 = ⇒ 6 - 0 = 6

„Geht nicht!“ „Das geht!“

Es folgt die Zehner-Stelle:

0 - 2 = ⇒ 2 - 0 = 2

„Geht auch nicht!“ „Jetzt geht es!“

Soweit zunächst nichts Neues, vergleicht man es mit dem vorherigen Beispiel. Bleibt das Rätsel, wie Julia zu dem einen Hunderter gelangt, wenn sie tatsächlich subtrahiert haben will.

Des Rätsels Lösung ist gar nicht so schwer: Man muss sich nur die Frage vorlegen, wie viele Hunderter die Zahl 26 hat? Diese Zahl hat keine Hunderter und das bedeutet dann:

100 - □26 = ____

↓ ↓

1 - 0 = 1

100 - 26 = 126 f

100 - 54 = 154 f

100 - 69 = 169 f

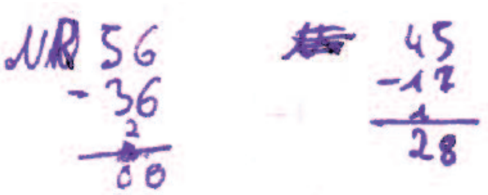
100 - 32 = 132 f

Du solltest subtrahieren, nicht addieren!

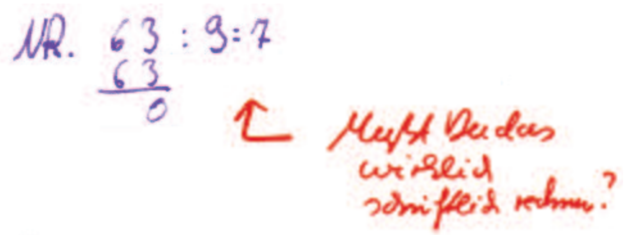
Und damit hat man dann alle Stellenwerte beisammen. Julia erzählt ihrer Mutter: „Und guck mal! Ich hab auch den Trick erkannt!“ Ungläubig fragt die Mutter nach: „Welchen Trick meinst du?“ „Dass 0-6 und 0-2 nicht geht. Das muss man dann umdrehen!“ Die restlichen Aufgaben wurden nach exakt der selben Methode „ausgerechnet“.

Das vollständig schriftliche Verfahren …

… ist im Prinzip nur noch einen Steinwurf weit entfernt. Der einzige Unterschied besteht im Prinzip nur darin, dass Julia die Zahlen nicht unter-, sondern nebeneinander stehen hat. Die Mutter ist verzweifelt: Wie bekommt sie die Fehler ihres Kindes bloß in den Griff? Nach langem Zögern entschließt sie sich nun doch, ihrer Tochter die schriftlichen Rechenalgorithmen beizubringen. Seitdem rechnet Julia einfach alles mit schriftlichen Rechenverfahren aus (auch Aufgaben, bei denen dies keinen „Vorteil“ ergibt wie 60+30). Manchmal ist es richtig und dann auch wieder nicht.



Eines ist geblieben: Julia erkennt weiterhin keine ganz augenscheinlich falschen Ergebnisse. Einfach alles wird nach Schema berechnet, anders kann es Julia nicht.



Augenscheinlich ja. Die Frage müsste besser lauten: **Warum** sieht Julia nicht, dass die Durchführung des schriftlichen Verfahrens bei dieser Aufgabe völlig unsinnig ist? Und notenmäßig hat sich natürlich auch nichts getan. Wie auch? Julia ist jetzt in der sechsten Klasse. Die Anforderungen steigen und steigen. Da kann Julia mit ihren schematischen Verfahren einfach nicht mehr mithalten. Die Notiz „falsch abgeschrieben, nicht rechenbar!“ mag dann ihre Berechtigung haben, wenn dies gelegentlich vorkommt. Ist dies aber häufig der Fall und beachtet man den Kommentar von Julia, der recht eindeutig darauf hinweist, dass das Kind mangels Operationsverständnisses über keinerlei Ergebniskontrollmöglichkeiten verfügt, dann muss hier „nachgehakt“ werden.

Julias andere schulischen Leistungen sind recht gut. Ob sie das Gymnasium weiter besuchen kann, steht wegen ihrer ungenügenden Mathematikleistungen allerdings in den Sternen.

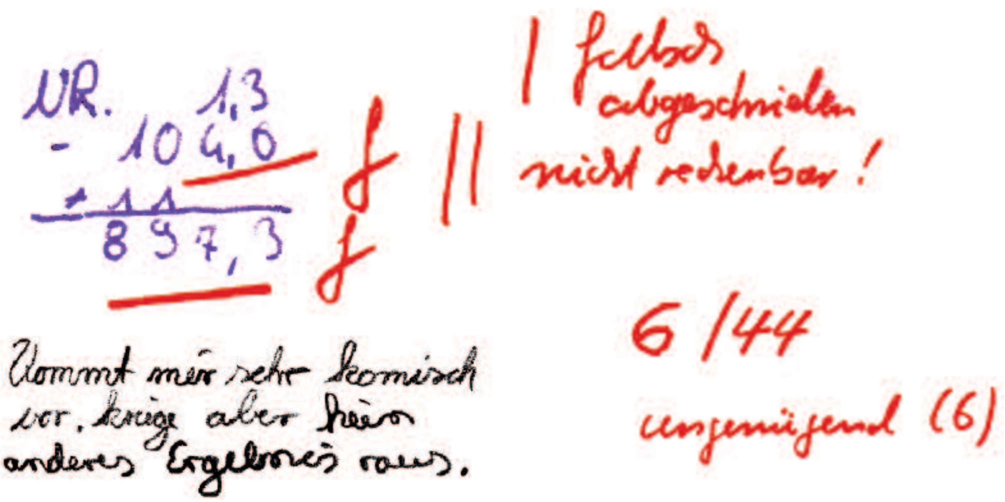
Der Preis

… der dann zu zahlen ist, ist hoch. Auch wenn es Julia mit ihren Verfahren durch die Grundschulzeit geschafft hat, auf dem Gymnasium ist dann endgültig Schluss. Irgendwann fallen rechenschwache Kinder ins notenmäßige Nirwana, manche bereits während der Grundschulzeit, andere erst auf der weiterführenden Schule, gleichgültig, welche Schulform.

Natürlich liegt das nicht allein an den hier vorgestellten schematischen Verfahren. Dies ist nur ein Baustein einer Rechenschwäche, allerdings kein unbedeutender. Warum?

Das Rechnen nach getrennten Stellenwerten (wie auch die vollschriftlichen Verfahren) können die eigentliche Problematik verdecken – wenn man nur auf das Ergebnis schaut, was leider ganz häufig der Fall ist. Die Kinder haben bereits massive Probleme im Zahlenraum bis 20 oder auch bis 10, was, sowohl das Verständnis von Addition und Subtraktion betrifft als auch insbesonders deren Zusammenhang.

Zumindest fällt Julia inzwischen auf, dass hier irgendetwas nicht stimmen kann. Was, das weiß sie nicht.



Sie zählen deshalb alle Aufgaben aus (mehr oder weniger heimlich an den Fingern, im Kopf oder mit anderem Material) oder lernen ganze Aufgabenketten einfach nur auswendig. Im Zahlenraum bis 100 gelingt dies dann nicht mehr. Das Rechnen nach getrennten Stellenwerten schafft hier „Abhilfe“, weil der Zahlenraum wieder auf 20 komprimiert wird. Stimmen dann bei genügend Übung die Ergebnisse, fallen die fatalen Konsequenzen erst einmal nicht auf. Hier nur einige Beispiele:

Das Kind bleibt bei seinen zählenden Rechenstrategien. Es erkennt die Strukturierung größerer Zahlenräume nicht, weshalb es auch offensichtlich falsche Ergebnisse nicht bemerkt. Abschätzstrategien werden nicht beherrscht. Das Kopfrechnen klappt nicht (das Kind muss immer das Aufgabenbild vor sich haben, um sich die Zahlen untereinander vorstellen zu können und dann Stelle für Stelle durchzählen). Das Kind ermüdet schnell, weil diese Verfahren sehr konzentrationsfordernd sind. Und nicht zuletzt: Das Kind wird im Unterricht laufend abgehängt, weil es im Tempo mit seinen Verfahren nicht mithalten kann.

Und damit fällt das Fazit, was nur diesen hier behandelten einen Aspekt einer Rechenschwäche anbetrifft, leider recht erschreckend aus: Das Kind bleibt auf dem Stand einer Erstklässlerin - richtige Ergebnisse hin oder her.

Ein Rat …

… lautet deshalb (und das gilt in ganz besonderem Maße für den Anfangsunterricht, und zwar bevor die Katastrophe ihren weiteren Verlauf nimmt): „Bitte zeige mir, wie du es an deinen Fingern rechnest!“ Benutzt das Kind die Finger nur als Zählhilfe, oder verwendet es beim Rechnen die Fingerbilder als kardinale Zahlen? Man muss sich dafür nicht stundenlang mit einem Kind allein beschäftigen (das geht erstens nicht und ist zweitens eher die Aufgabe für Lerntherapeuten). Drei bis vier Minuten reichen häufig schon aus, um recht eindeutige Hinweise darauf zu bekommen, ob ein Kind nur zählend operiert, oder ob es mit Aufgabenstellungen Mengenoperationen identifiziert. Trifft ersteres zu, kann man sich den Fortgang im Unterrichtsstoff schenken, will man nicht mit den oben beschriebenen Konsequenzen konfrontiert werden.

Angenommen, das Kind hat die Sache verstanden. Es operiert sicher im Zahlenraum bis 10 (oder auch bis 20), hat sich weitgehend vom Anschauungsmaterial lösen können und ermittelt auch bei allen Platzhalteraufgaben korrekt und mit Erklärung die richtige Lösung. Dann ist des weiteren darauf zu achten, dass es die Grundzüge des Stellenwertsystems verstanden hat.
Wenn es nun um Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 geht, sollte man es **nicht** zulassen, dass die Kinder beide Zahlen nach ihren Stellenwerten trennen. Warum?

Nehmen wir zunächst ein einfaches Beispiel:

48 + 20 =

Fernziel ist es, dass die Kinder Aufgaben im Zahlenraum bis 100 im Kopf rechnen (sie dürfen die Aufgabenstellung also nicht sehen). Trennt man nun den ersten Summanden nach seinen Stellenwerten auf, ergeben sich aus einer gleich zwei Aufgaben:

40 + 20 = 60
60 + 8 = 68

Es kommt hinzu, dass sich das Kind während der ersten Aufgabe (40+20) die 8 Einer der 48 merken muss. Ein völlig unnötiger Aufwand. Besser ist es, die Aufgabe in einem Zug zu lösen:

48 + 20 = 68

Noch verwickelter wird es bei Subtraktionen, wenn man die erste Zahl zerlegt:

57 - 30 =
50 - 30 = 20
20 + 7 = 27

Hier wechselt bei der zweiten Aufgabe auch noch das Rechenzeichen. Das kann für zusätzliche Verwirrung sorgen.

Nehmen wir uns jetzt einmal die Aufgabe von Julia vor und rechnen sie nach der Methode der getrennten Stellenwerte durch:

$$58 + 27 =$$
$$50 + 20 = 70$$

Julia muss sich jetzt drei Zahlen merken: Die 70, die 8 Einer der 58 und die 7 Einer der 27. Jetzt erfolgt der nächste Schritt:

$$8 + 7 =$$
$$8 + 2 = 10$$
$$10 + 5 = 15$$

Jetzt kommt der nächste Rechenschritt. Trennt man nun die Stellenwerte abermals (Julia muss sich die 5 Einer der Zahl 15 merken), ergibt sich:

$$70 + 10 = 80$$
$$80 + 5 = 85$$

Nun rechnet Julia die Aufgabe ohne Trennung des ersten Summanden in seine Stellenwerte. Sie addiert zunächst die 7 Einer der Zahl 27 und muss sich jetzt nur die Zahl 20 merken, da sie die übrigen Zahlen gewissermaßen aktuell „mitschleppt“:

$$58 + 27 =$$
$$58 + 2 = 60$$
$$60 + 5 = 65$$

Und jetzt hat Julia die Zahl 65, mit der sie direkt weiterrechnen kann, unmittelbar präsent im Kopf- ein großer Vorteil gegenüber der Methode, nach getrennten Stellenwerten zu rechnen:

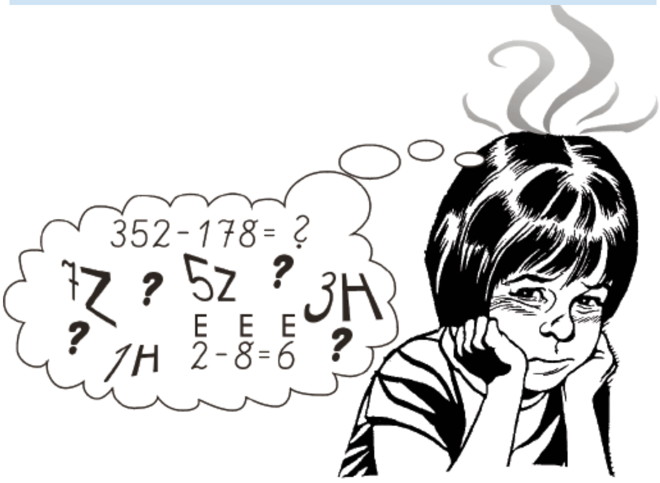
$$65 + 20 = 85$$

Vergleicht man die beiden Vorgehensweisen, fällt unseres Erachtens das Ergebnis eindeutig aus: Im zweiten Verfahren ist die Anzahl der zu lösenden Gleichungen geringer. Auch die sich zu merkenden Restmengen sind deutlich geringer, und Zwischenergebnisse muss man sich beim zweiten Weg gar nicht merken, weil immer direkt im Anschluss mit der gleichen Zahl weitergerechnet werden kann.

Fazit

Rechnet man wie im zuerst beschriebenen Weg, dann kann es nicht verwundern, dass die Kinder beim Kopfrechnen immer wieder die Frage stellen: „Wie war noch mal die Aufgabe?“
Das Chaos, das dann beim Rechnen nach getrennten Stellenwerten im Zahlenraum bis 1000 (insbesondere bei Subtraktionen mit Stellenwertüberschreitungen) ansteht, kann man sich leicht vorstellen: Die Kinder vergessen Zwischenergebnisse, sie wenden bei Überschreitungen das Kommutativgesetz an, sie können sich an die eigentliche Aufgabenstellung nicht mehr erinnern und überblicken die Restmengen der übrigen Stellenwerte nicht mehr. Wenn dann überhaupt noch ein Ergebnis zustande kommt, dann ist es häufig völlig falsch.

Auch wenn man zunächst glaubt, dass man dem Kind durch die Trennung der Zahlen nach Stellenwerten die Sache vereinfacht, ein quantitatives Verständnis installiert man dadurch nicht. Die vermeintliche Vereinfachung ist genau genommen die Vorwegnahme des schriftlichen Verfahrens. Das mag richtige Ergebnisse im Zahlenraum bis 100 produzieren, wenn die Kinder die Aufgaben in schriftlicher Form vor sich haben.



Beim Kopfrechnen dreht sich die Sache völlig um: Aus der „Vereinfachung“ wird eine Erschwernis, weil sich der Merkaufwand deutlich erhöht. Spätestens im Zahlenraum bis 1000 wird dies dann überdeutlich. Deshalb sollte man von diesem Verfahren besser die Finger lassen - und das gilt nicht nur für rechenschwache Kinder.

- Aus der Praxis für die Praxis -

„Rechne erst bis zum Zehner" weil das einfacher ist!?

Esther Finster, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Vor einigen Wochen lernte ich Bianca und ihre Mutter kennen. Die Mutter erzählte mir, dass Bianca bei einstelligen Operanden „erst bis zum vollen Zehner" rechne und richtig löse. Nur wenn viele Aufgaben im Heft stünden, schlichen sich noch Fehler ein.

In der Diagnostik stelle auch ich fest, dass das Ergebnis bei Aufgaben wie 38 + 7 oder 45 – 7 stimmt. Doch aus mehreren Gründen frage ich nach, wie Bianca gerechnet hat: Weil sie in meinen Augen recht lange für ihre Lösung braucht, weil sie beim Rechnen konzentriert an die Wand blickt und weil sie nach 38 + 7 die Umkehrung 45 – 7 neu rechnen muss. Biancas Antwort verschafft zunächst keine Aufklärung: „So, wie wir zu Hause und in der Schule rechnen." Ich fasse nach und bereitwillig erwidert Bianca: „Ich zähle bis zum Zehner und dann weiter. Die Finger nehme ich nicht mehr!" Stolz fügt sie hinzu: „Das konnte ich erst nicht so gut. Wenn ich bei 40 eine Pause gemacht habe, hatte ich vergessen, wie viel ich dann weiterzählen musste." Auch 45 – 7 lasse ich mir vorrechnen. „45 ist die erste Zahl, dann rechne ich 44, 43, 42, 41, 40 (Pause), 39, 38."

Bianca löst die Aufgaben, indem sie monoton die Zahlwortreihe aufsagt. Um den Abtrag des Addenden bzw. Subtrahenden festzuhalten, stellt sie sich im Kopf Würfelbilder oder das Zehnerfeld vor – auf diese Weise kontrolliert Bianca ihre Zählschritte. Bei zweistelligen Operanden orientiert sie sich am Zwanzigerfeld oder am Abakus. „Aber das ist schwer!", bemerkt sie.

„Zähl"-Kinder wie Bianca können nach etlichen Trainingsstunden mit dieser Technik einige Anforderungen bewältigen. Umfassen die Hausaufgaben mehrere Rechenblöcke, wird manchmal gegen Ende angesichts der erforderlichen Anstrengung, weniger treffsicher gezählt. Die sachlogischen Überlegungen, die hinter „Rechne erst bis zum Zehner" stehen und auf der Anwendung der Zahlzerlegung aus dem Zahlenraum bis zehn basieren, haben sie sich gar nicht erschlossen. Rechenerleichterungen auf Grundlage von mathematischem Wissen aus dem Eingangsbereich bis zehn, in Kombination mit dem Bündeln und Entbündeln im erweiterten Zahlenraum und den dekadischen Analogien, können sie sich überhaupt nicht zu nutze machen.

Für solche Schüler macht es keinerlei Sinn, erst bis zum Zehner zu zählen. Dieses Verfahren erschwert und verlangsamt den Zählvorgang. Es erhöht sogar das Risiko, zu falschen Ergebnissen zu gelangen. Bei Aufgaben mit zweistelligen Addenden bzw. Subtrahenden ist es schließlich nicht mehr anwendbar.

In der zweiten Klasse fallen diese Kinder häufig dadurch auf, dass sie „beim Rechnen" lange brauchen, weswegen im vorgegebenen Rahmen nur ein Teil der Aufgaben gelöst wird. In Fällen wie bei Bianca lassen sich die Probleme nicht auf mangelnde Routine reduzieren und sind mit der Beachtung des Ratschlags „Du musst beim Rechnen noch schneller werden, übe fleißig weiter" nicht in den Griff zu bekommen.