



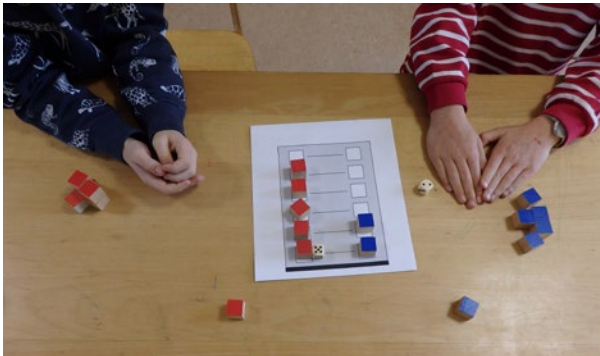
Kopf und Zahl

JOURNAL

des Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.
in Zusammenarbeit mit den Mathematischen Instituten
zur Behandlung der Rechenschwäche

30. AUSGABE, Herbst 2018

www.dyskalkulie.de



Wie viele? Wie viele noch?
Wie viele mehr?

Aufbau tragfähiger Zahlvorstellungen

Was ist eine tragfähige Zahlvorstellung?

Autorin: Ute Plötzer, Grundschullehrerin und Fachleiterin
Mathematik am ZfSL Essen

„Ein mathematisches Konzept wie eine Zahl (...) verstehen lernen heißt, ein reichhaltiges Geflecht von Beziehungen herzustellen zwischen verschiedenen Darstellungen, Vorstellungen und Anwendungssituationen...“

(Gerster, Schultz: Schwierigkeiten beim
Erwerb mathematischer Konzepte
im Anfangsunterricht. 2000)

Rechenschwache Kinder haben häufig ein solches „Geflecht“ noch nicht herstellen können. Sie verfügen über einseitige oder reduzierte Zahlvorstellungen.

Für die Ausbildung einer tragfähigen Zahlvorstellung sind folgende Aspekte von großer Bedeutung :

(vgl. Förderzentrum Mathematik -TU Dortmund „Aufbau von Zahlvorstellungen“ <http://foerderzentrum.mathematik.tu-dortmund.de/drupal/mathematische-basiskompetenzen/aufbau-von-zahlvorstellungen>)

- die **ordinale Zahlvorstellung**, d. h. die Vorstellung einer Zahl als Element in der Zahlwortreihe „eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, **sieben**“

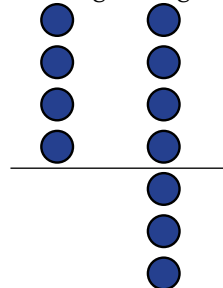
- die **kardinale Zahlvorstellung**, d. h. die Vorstellung einer Zahl als Menge von Elementen



- die **Teile-Ganzes-Beziehung**, d. h. die Einsicht, dass Zahlen zerlegbar und aus Teilen zusammensetzbar sind.

Die Zahl 7 ist z. B. zerlegbar in 4 und 3 oder in 5 und 2.

- die **relationale Zahlvorstellung**, d. h. das Verständnis, dass sich die Anzahlen unterschiedlicher Mengen vergleichen lassen:



„7 ist um 3 mehr als 4.“

„4 ist um 3 weniger als 7.“

Es ist keineswegs selbstverständlich, dass Grundschulkinder über alle diese genannten Vorstellungen verfügen.

Für ein Verständnis der Rechenoperationen und für die Ablösung vom zählenden Rechnen ist die Einsicht in diese Beziehungen jedoch notwendige Voraussetzung.

Inhalt

Wie viele? Wie viele noch? Wie viele mehr?

Aufbau tragfähiger Zahlvorstellungen 1

Von Rechen„regeln“ und dem

Zusammenhang der Rechenarten (1) 5

Impressum 11



In ihrem Kompetenzebenen-Modell beschreibt Kristin Krajewski die entscheidenden Voraussetzungen für den Erwerb mathematischer Kompetenzen:

Auf **Kompetenzebene 1** sind Kinder in der Lage, die Zahlwortreihe aufzusagen, besitzen jedoch noch kein Verständnis dafür, dass die Zahlworte für Mengen stehen.

Vor Schuleintritt sollten die Kinder verstanden haben, dass hinter aufsteigenden Zahlen größer werdende Mengen stehen und umgekehrt: **Kompetenzebene 2**.

Kinder, denen dieses Verständnis für die Verknüpfung von Zahlen mit Mengen fehlt, entwickeln eher Schwierigkeiten beim Rechnen.

Auf **Kompetenzebene 3** erkennen die Kinder, dass sich Zahlen aus anderen Zahlen zusammensetzen lassen und dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen wieder eine Zahl ist.

Rechenschwache Kinder haben oft die drei Ebenen der Entwicklung nicht vollständig durchlaufen, sondern weisen hier Defizite auf.

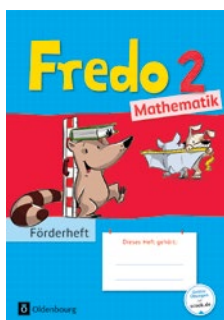
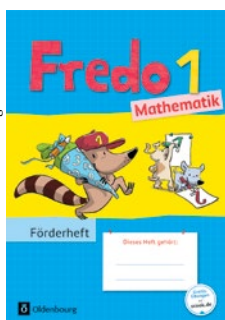
(vgl.: Prof. Dr. Kristin Krajewski „Entwicklungsorientierte Förderung früher mathematischer Kompetenzen“, Interview 12.08.2010 www.bildungsserver.de/innovationsportal/bildungplus.html?artid=752)

Zahlvorstellungen aufbauen, verknüpfen und erweitern

Zur Prävention von Rechenstörungen sowie in der Förderung rechenschwacher Kinder geht es zunächst vor allem darum, Zahlvorstellungen aufzubauen, zu verknüpfen und zu erweitern.

Folgende Anregungen basieren auf den Förderheften Fredo 1 und Fredo 2.

Coverillustration: Cornelsen Verlag / Martina Theisen



(M. Balins, R. Dürr u. a. unter Beratung von St. Franke (1) bzw. Ch. Bussebaum (2), Oldenbourg Schulbuchverlag München, 2018)

Diese Hefte bieten ergänzende Übungen und Anregungen für Kinder mit Rechenschwierigkeiten.

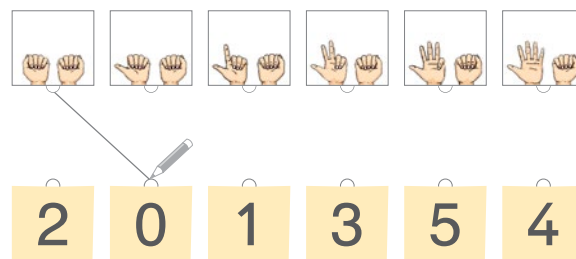
Aktuell erschienen sind die Förderhefte Band 1 und 2, Band 3 und 4 erscheint voraussichtlich im Frühjahr 2019.

Hinweise zur Förderung sowie weitere Kopiervorlagen sind als Download für Lehrkräfte erhältlich.

Wie viele? Verknüpfung von Zahlen mit Mengen

Von großer Bedeutung ist zunächst die Sicherung der Kompetenzebene 2, also die Sicherung des Verständnisses, dass Zahlworte für Mengen stehen.

2 Verbinde.



(M. Balins u. a. Förderheft Fredo 1, München 2018, S. 6)

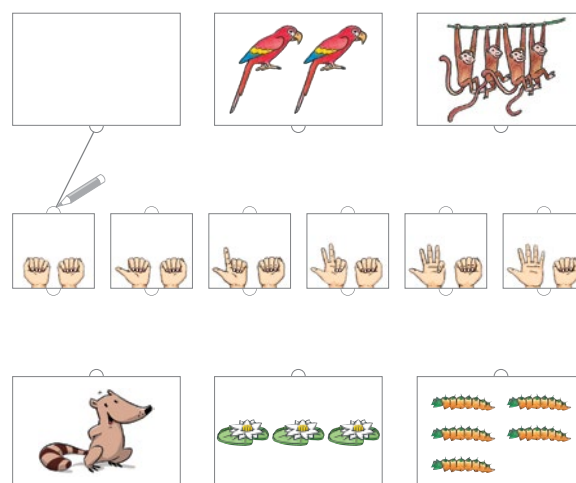
Die Nutzung von Fingerbildern bietet für dieses Verständnis eine gute Grundlage.

Hierbei ist auf einen reflektierten Einsatz der Fingerbilder zu achten.

Damit ein Kind die „fünf“ nicht nur als Zahl in der Zahlenreihe versteht, ist es zum Beispiel hilfreich, die Hand mit den 5 ausgestreckten Fingern noch einmal umfassen zu lassen mit den Worten: „Zusammen sind es fünf Finger“.

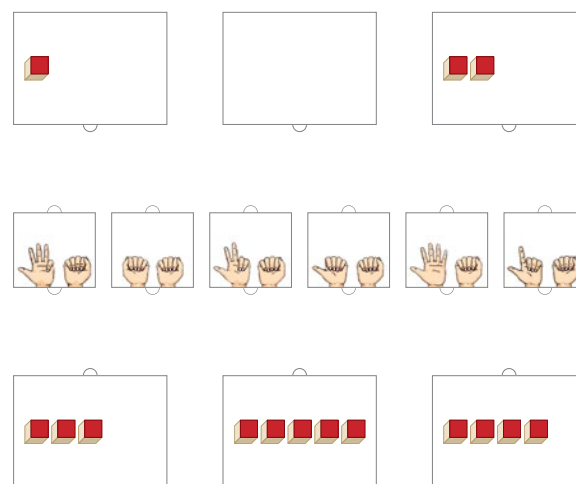
Die Verknüpfung von Zahlen und Mengen soll in vielen Variationen und Anwendungen erfolgen, sowohl handelnd als auch bildhaft.

1 Verbinde.



(M. Balins u. a. Förderheft Fredo 1, München 2018, S. 6)

1 Verbinde.



(M. Balins u. a. Förderheft Fredo 1, München 2018, S. 7)

Illustration: Cornelsen Verlag / Renate Möller

Illustration: Cornelsen Verlag / Cleo-Pera Kürze, Renate Möller (Fingerbilder), Martina Theisen (Fredo)

Illustration: Cornelsen Verlag / Renate Möller, Detlef Seidensticker (Würfel)

Den abgebildeten Übungen sollten nach Möglichkeit stets Handlungserfahrungen vorausgehen.

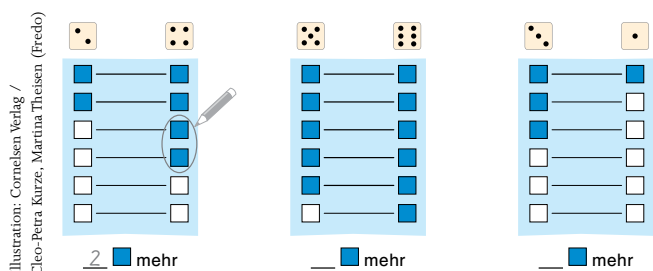
Ebenso ist es wichtig, dass zu den Übungen handlungsbegleitend gesprochen wird: „Zusammen sind es fünf Finger“. „Zusammen sind es fünf Würfel“.

Wie viele noch? Wie viele mehr? Beziehungen zwischen Zahlen erkennen

Darüber hinaus liegt eine entscheidende Leistung darin, Beziehungen zwischen Zahlen zu verstehen (Kompetenzebene 3).

Dazu gehört das Verständnis, dass der Unterschied zwischen zwei Zahlen wieder eine Zahl ist (Relationzahlbegriff).

Wie viele Würfel mehr?



(M. Balins u.a. Förderheft Fredo 1, München 2018, S. 15)

Dieses Verständnis kann zunächst handelnd durch das Spiel „Hamstern“ gefördert werden.

Die beiden Spieler benötigen hierzu

2 Spielwürfel, 12 Holzwürfel und ein Spielfeld (s. Abbildung).

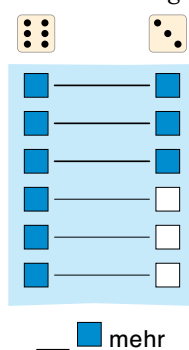
Jeder Spieler würfelt mit seinem Spielwürfel und belegt das Spielfeld mit der entsprechenden Anzahl an Holzwürfeln.

Die Würfelanzahlen werden nun verglichen: Wer hat mehr Würfel? Wie viele Würfel sind es mehr?

Hat beispielsweise Ole 2 Würfel mehr als Marie, darf er diese beiden Würfel „hamstern“ und es beginnt eine neue Spielrunde.

Anknüpfend an diese Spielhandlung können wichtige Einsichten über Beziehungen zwischen Zahlen gewonnen und ausgebaut werden.

Von Bedeutung ist hierbei, dass die Kinder den Mengenvergleich über die Zuordnung der Holzwürfel anstellen. In dieser Zuordnung wird direkt erkennbar, dass links 3 Würfel mehr sind als rechts (siehe Abb.).



Die Kinder erfahren so, dass sie Mengen miteinander vergleichen können, ohne die beiden einzelnen Anzahlen auszuzählen.

Auch hier ist das begleitende Sprechen und Beschreiben wichtig.

„Wer hat mehr Würfel? Wie viele Würfel sind es mehr? Ole hat 2 Würfel mehr als Marie.“

Auf die Frage „Wie viele mehr?“ antworten viele Kinder mit der größeren Zahl, wie im folgenden Beispiel:

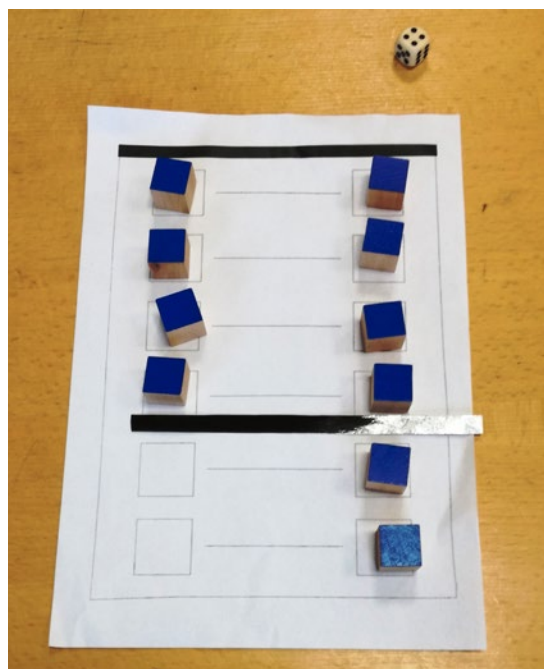
Ole hat 6 Würfel, Marie hat 4 Würfel. Wie viele Würfel hat Ole mehr?“

Antwort: „Er hat 6 Würfel mehr.“

Dies ist ein Zeichen dafür, dass die relationale Zahlvorstellung noch nicht gesichert ist.

Wenn diese Beziehung sicher erworben wurde, kann auch die Umkehrung beschrieben werden:

„Wer hat weniger Würfel? Wie viele Würfel hat Marie weniger? Marie hat 2 Würfel weniger als Ole.“



In der Abbildung wird erkennbar, wie die Kinder den Unterschied ermitteln können. „Bis zu welcher Stelle kann jedem Würfel auf der einen Seite ein Würfel auf der anderen Seite zugeordnet werden?“

Diese Stelle wird mit einem Strich markiert und erinnert so mit dem oberen Strich an das Gleichheitszeichen: „Bis hier sind die beiden Mengen gleich groß.“

Darunter wird der Unterschied erkennbar.

Auf dieser Grundlage erwerben die Kinder ein Verständnis für den Unterschied zwischen zwei Zahlen.

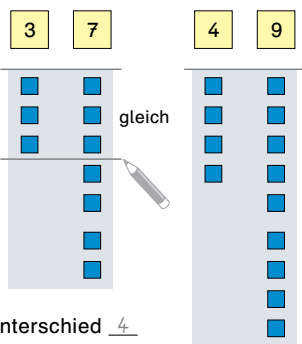
Dieses Verständnis ist wiederum Bedingung für eine tragfähige Vorstellung von der Subtraktion, die mehr umfasst als das „Wegnehmen von Gegenständen“.

Nur wer zwischen Zahlen Beziehungen herstellen kann, versteht auch Rechenoperationen und kann Rechenstrategien entwickeln.

Unterschiede

(M. Balins u. a. unter Beratung von Ch. Bussebaum. Förderheft Fredo 2, München 2018, S. 9)

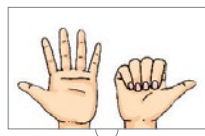
Notiere den Unterschied.



Unterschied ___

Beziehungen zwischen Zahlen können auch mithilfe der Fingerbilder aufgebaut und entwickelt werden.

Zunächst wird das Kind aufgefordert, eine Zahl als Fingerbild darzustellen.

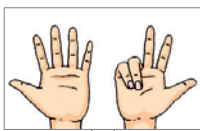


„Zeige 6!“

Wenn dies sicher gelingt und die Darstellung auch als Menge von 6 Fingern sicher erfasst wird,

wird das Kind aufgefordert, aus diesem Bild ein anderes Fingerbild entstehen zu lassen.

„Mache daraus 8! Wie viele Finger musst du aufklappen, damit aus 6 Fingern 8 Finger werden?“



Gelingt diese Übung noch nicht (leitet das Kind also die 8 nicht aus der 6 ab, sondern lässt sie neu entstehen), ist dies ein Hinweis darauf, dass die Beziehung zwischen diesen beiden Zahlen noch nicht erkannt wird.

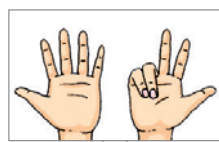
Zahlen zerlegen und zusammensetzen

Neben der Differenz zwischen den Zahlen ist auf der Kompetenzebene 3 auch wichtig zu erkennen, dass Zahlen zerlegt werden können und sich umgekehrt aus anderen Zahlen zusammensetzen lassen.

Auch dieses Verständnis sollte in verschiedenen Zusammenhängen erworben und gefestigt werden.

Zunächst können wiederum die Fingerbilder genutzt werden.

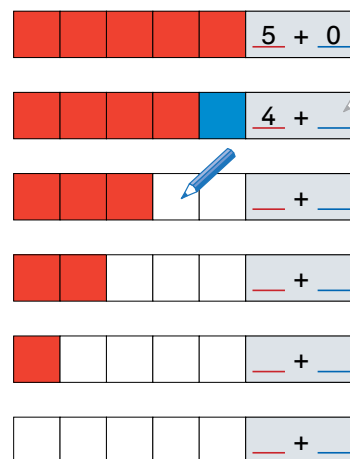
Diese haben den Vorteil, dass sie eine Zerlegung der Zahlen in $5 + x$ nahe legen:



„Zeige 8! Es sind 5 Finger an der einen Hand und 3 an der anderen.“

M. Balins u. a. Förderheft Fredo 1, München 2018)

2 Immer 5



Eine weitere Übung lässt hier die verschiedenen Zerlegungsmöglichkeiten der Zahl 5 entstehen.

Diese Zerlegungsmöglichkeiten können zunächst handelnd mit roten und blauen Holzwürfeln gefunden werden, anschließend wie abgebildet notiert werden.

Ein bei vielen Kindern beliebtes Spiel kann wie folgt mit den abgebildeten Zerlegungen gespielt werden:

Ein Spielsatz besteht aus den Zerlegungen einer Zahl, abgebildet wie oben auf einzelnen Pappstreifen.

Die Streifen werden offen auf dem Tisch ausgebreitet. Ein Streifen wird gewendet, so dass die Zerlegungsaufgabe nicht mehr sichtbar ist. Der Spielpartner muss nun herausfinden, welche Zerlegung umgedreht wurde.

Viele Kinder ordnen die Streifen, um dies herauszufinden. So werden die verschiedenen Zerlegungen der Zahl zueinander in Beziehung gesetzt (handelnd oder gedanklich) und die Zerlegungsmöglichkeiten werden gefestigt.

Zusammenfassung

Die Sicherung der Kompetenzebene 3 ist notwendige Voraussetzung für die Ausbildung von Rechenstrategien.

Dies soll hier am Beispiel der Aufgabe $8+7$ erläutert werden:

Wenn ein Kind weiß, dass

„8 um 2 kleiner ist als 10“ und dass man „7 in 5 und 2 zerlegen“ kann,

kann es diese Zahlbeziehungen nutzen und die Aufgabe schrittweise lösen:

$$(8 + 2) + 5 = 15$$

7

Illustration: Cornelsen Verlag / Detlef Seidensticker (Stifte)

Abrufbare Zahlbeziehungen sind hierbei eine entscheidende Grundlage für den nicht-zählenden Rechenweg.

Möglich wäre auch, auf folgendes Wissen zurückzugreifen:

„Das Doppelte von 7 ist 14“ und „8 ist um eins größer als 7“.

$8+7$ kann man also lösen über $7 + 7 + 1$.

Ein Kind, das über solches Wissen über Beziehungen zwischen Zahlen nicht verfügt, wird bei der Lösung der Aufgaben $8+7$ sehr wahrscheinlich zählend vorgehen müssen.

Die aufgezeigten Übungen sind beispielhaft ausgewählt und variierbar.

Jedoch bilden diese Übungsformen wichtige Aspekte zur Prävention von Rechenschwierigkeiten und zur Förderung rechenschwacher Kinder ab, die von grundsätzlicher Bedeutung sind.



Das ist doch alles ganz logo - oder?



Von Rechen„regeln“ und dem Zusammenhang der Rechenarten (1)

Punktrechnung geht vor Strichrechnung

Wolfgang Hoffmann, Mathematisch Lerntherapeutisches Zentrum Dortmund, Bochum, Lüdenscheid

„Punktrechnung geht vor Strichrechnung, das war schon immer so, auch als ich noch in die Schule gegangen bin! Das muss man sich eben einfach nur merken.“ Nun ja, ob das wirklich ein so guter Grund ist, lassen wir mal dahingestellt. Jedenfalls fliegt man sonst wohl ganz schnell raus aus dem „algebraischen Paradies“. So manches Elternteil verzweifelte schon früher bei Aufgaben wie

$$2(6 - 3c) = ?$$

Literatur

M. Balins, R. Dürr u.a. unter Beratung von St. Franke (1) bzw. Ch. Bussebaum (2) Fredo Förderheft. Oldenbourg Schulbuchverlag München, 2018

Förderzentrum Mathematik -TU Dortmund „Aufbau von Zahlvorstellungen“ <http://foerderzentrum.mathematik.tu-dortmund.de/drupal/mathematische-basiskompetenzen/aufbau-von-zahlvorstellungen>

Gerster, H.-D. und Schultz, R: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Freiburg im Breisgau, Mai 1998 (Überarbeitet und erweitert im Mai 2000, Auflage Mai 2004) <https://phfr.bsz-bw.de/files/16/gerster.pdf>,

Krajewski, K. „Entwicklungsorientierte Förderung früher mathematischer Kompetenzen“, Interview 12.08.2010 https://www.bildungsserver.de/onlineressource.html?onlineressourcen_id=45774

Mathe inklusiv mit PIKAS: Aufbau von tragfähigen Zahlvorstellungen. Hintergrund <https://pikas-mi.dzlm.de/inhalte/zahlvorstellungen-frag%C3%A4hige-vorstellungen-aufbauen-zr-bis-100/hintergrund>

PIK AS Sachinfos Haus 3. Prävention von Rechenstörungen <https://pikas.dzlm.de/pikassfiles/uploads/upload/Material/Haus.../Sachinfos.pdf>

Meistens wird leider nicht nach den Ursachen gesucht, sondern ...

... Regelwerk tritt an die Stelle von Verständnis

Und von dem hat ein halbwegs ordentliches Mathe-Buch jede Menge zu bieten (auch bekannt als Definitionen oder Sätze). Einmal ganz abgesehen davon, dass die Aufforderung „Schaut euch das im Mathe-Buch noch einmal an!“ in aller Regel gänzlich ungehört bleibt, ist es auch mir, obwohl ein guter Mathe-Schüler, immer ein Rätsel gewesen, was mit den bis zur Unkenntlichkeit abgekürzten Definitionen und Sätzen eigentlich gemeint sein könnte. Irgendwie haben ein paar Schüler die Mathematik bis zum Abi auch wirklich verstanden - Sätze hin oder her. Der Rest hat Regeln gepaukt und nie wirklich durchdrungen, was das alles soll.

Man multipliziert zwei Brüche, indem man Nenner mit Nenner und Zähler mit Zähler multipliziert und, wenn möglich, vor dem Ausrechnen kürzt. ✓

Prima auswendig gelernt! Es folgt die Anwendung:

$$\frac{5}{8} \text{ von } 25 = \underline{125} \quad f \quad 7 \frac{3}{4} = 1 \frac{2}{4} \quad f$$

So mancher übende Elternteil gibt sich dann zu Hause kräftig Mühe, dies dem Kind begreiflich zu machen - irgendwie:

„Mal geht immer vor Plus!“ Siehe oben!

§ StGB

„Anders herum ist das nicht erlaubt!“

„Sonst ist das falsch!“

Oder etwas „pfiffiger“:

„Das ist in Mathe so definiert!“

Eher schon nach Kapitulation anmutend:

„Das ist nun ‘mal eine Rechenregel, frag’ nicht!“

„Man hätte das auch anders machen können!“

Auch nicht schlecht gemeint, mathematisch aber eher nicht „so recht passend“:

Verfallsregeln nicht beachtet

Hier gilt die StVO

Es gibt unzählbare Varianten, wie man versucht, diese „Regel“ in den Kinderköpfen zu platzieren. Sehr beliebt war bei uns damals der Spruch

„Aus Summen kürzen nur die Dummen!“,

den wir vor jeder Mathestunde 5mal im Klassenverband aufsagen mussten. Ergebnis: Man bietet den SchülerInnen einige „Verlockungen“ an und es wird aus Summen gekürzt, was die Variablen und Exponenten nur so hergeben:

$$\frac{2^3 + 16^4 + 2^7}{12_3 + 2^7 + 2^3} = \frac{4}{3}$$

Was für ein „algebraisches Gemetzel“!

Die Fehlervarianten, die unter dieses „Gesetz“ fallen, sind schier endlos:

$$11x = 16x \quad | -11x \\ x = 5x \quad | -x$$

Den Rest sparen wir uns!

Klasse 8: Lineare Gleichungen

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{a^{\cancel{3}}}{a^{\cancel{2}}} = \frac{a^{\cancel{3}}}{a^{\cancel{2}}} = 3$$

Für ein paar \$ mehr



Klasse 8/9: Potenzrechnung

Und natürlich aus der Klasse, in der der Fehler auf die Welt kam:

$$5 + 3 \cdot 8 = 64 \quad f$$

Klasse 2: Multiplikation, kleines 1x1

Die „Strafe“ folgt dann meist auf dem Fuß (so sehen es jedenfalls die Kinder):

ungenügend (6)

Kaum ein(e) Mathematik-LehrerIn in der Sek I schaut dahin, wo die Ursachen solcher Fehler zu suchen sind. Und die liegen ganz oft im zweiten Halbjahr der Klasse 2 in der Grundschule.

Warum und wieso und wie man es vielleicht etwas besser machen kann (in der Grundschule und in der Sek I), darum soll es nun im Folgenden gehen.

Viel, viel zu schnell ...

... ist man mit der Einführung des kleinen 1x1 per Anschauung, Rechengeschichten und Zusammenhang Multiplikation/Addition in Klasse 2 fertig. Häufig dauert das nicht ‘mal zwei Wochen. Einige Wochen später fällt das Ergebnis dann reichlich ernüchternd aus:

Du musst unbedingt das 1x1 wiederholen!

Und weil das dann lediglich bedeutet, dass das Kind die Reihen auswendig lernen soll, die es dann doch wieder vergisst, sehen die Multiplikationskenntnisse in Klasse 5 auf den Gesamtschulen entsprechend aus: Mindestens 30 bis 40 % (so die Mathe-LehrerInnen) haben die Multiplikation nicht verstanden und beherrschen nicht das 1x1.

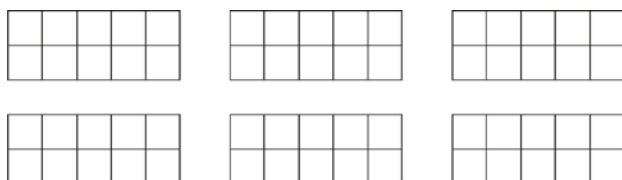
Elementar wichtig: Auf enaktiver Ebene den Zusammenhang zur Addition klären!

Beginnen Sie mit der Division, ohne dass Sie den Kindern dies konkret als Geteilt-Aufgabe vorstellig machen.

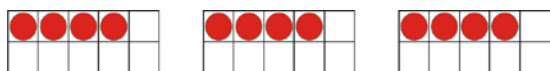
Legen Sie den Kindern z. B. 12 Chips auf den Tisch (es sollte eine Anzahl mit möglichst vielen ganzzahligen Teilern sein).



Dann verteilen Sie an die Kinder (oder den Tisch) 6 Zehnerfelder.



Lassen Sie die Kinder die Chips abzählen. Auf einem Blatt notieren sie die Anzahl. Nun fordern Sie die Kinder auf, sich 3 Zehnerfelder zu nehmen und alle Chips so zu verteilen, dass jedes Zehnerfeld gleich viele Chips enthält. Das Ergebnis der Bemühungen sollte dann so aussehen:

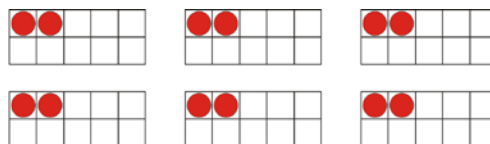


Die Kinder bekommen Ziffernkarten und Plus- sowie Gleichheitszeichen und legen die passende Additionsaufgabe unter die Zehnerfelder:

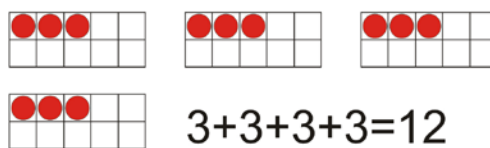
$$4 + 4 + 4 = 12$$

Lassen Sie die Kinder nun angeleitet experimentieren: „Geht das auch mit mehr oder auch weniger Zehnerfeldern? Probiert es ‘mal aus.“

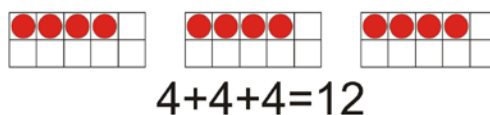
Die Kinder sollten auf alle Lösungen kommen:



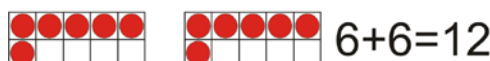
$$2+2+2+2+2+2=12$$



$$3+3+3+3=12$$



$$4+4+4=12$$



$$6+6=12$$

Bevor Sie nun sofort auf die abgekürzte Schreibweise der Multiplikation eingehen (nichts anderes ist eine Multiplikation), trainieren Sie die Verteilungen mit den Kindern an anderen Anzahlen. Machen Sie den Kindern klar, dass es sich hier um ganz besondere Plus-Aufgaben handelt, weil hier immer die gleiche Anzahl addiert wird.

Jetzt fertigen Sie zu den „Anzahlexperimenten“ Textaufgaben an. Die Kinder müssen an dieser Stelle lernen, wozu man die Aufgaben benötigt. Wie sieht das in der Wirklichkeit aus?

Wir zeigen Ihnen ein Beispiel:



Die Hausmeisterin will den Kindern eine Freude machen. Sie hat Äpfel und möchte sie den Kindern schenken. Jedes Kind hat einen Beutel dabei, in den sie die Äpfel legt. Aber aufgepasst: Jedes Kind will gleich viele Äpfel. Wie viele Äpfel bekommt jedes Kind?



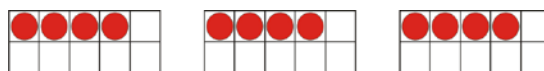
Wie mach' ich das nur?



Damit sollten sich die Kinder mindestens vier bis sechs Mathestunden beschäftigen bis es eben alle verstanden haben und auch beherrschen.

Das „Mal“ in der „Malaufgabe“

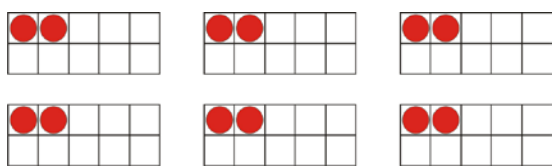
Hinter einem Produkt steckt eine besondere Summe; alle Summanden sind gleich groß.



Fragen Sie nach:



Achten Sie unbedingt darauf, dass das Kind das Wort „mal“ verwendet! Wiederholen Sie dies mit anderen Beispielen.



„Wenn ihr ausrechnen sollt, wie viele rote Punkte es zusammen sind, welche Plusaufgabe gibt das?“

$$2+2+2+2+2+2$$

„Wie oft müsst ihr die Zwei addieren?“

$$\underbrace{2+2+2+2+2+2}_{\text{Sechsmal}}$$

Lassen Sie zunächst das Ergebnis völlig außen vor. Es kommt hier auf den Zusammenhang der Rechenarten und die Funktion der einzelnen Faktoren in einem Produkt an!

„Diese lange Plusaufgabe können wir auch kürzer schreiben.“

$$2+2+2+2+2+2 = 6 \text{ mal } 2$$

„Aufgaben, bei denen immer die gleiche Zahl addiert wird, heißen Malaufgaben. Damit es mit dem Aufschreiben noch schneller geht, schreiben wir statt dem Wort mal einfach einen Punkt.“

$$2+2+2+2+2+2 = 6 \cdot 2$$

Die Kinder müssen die Sinnhaftigkeit dieser abgekürzten Schreibweise unbedingt verstehen. Hausaufgaben wie „Schreibt die Malaufgabe 42 mal 17 als Plusaufgabe!“ können da hilfreich sein.

Nicht nur für die SekI-LehrerInnen:

Bei SchülerInnen mit Schwierigkeiten in der Algebra sind wir bei Gesamtschülern und Gymnasiasten hier immer wieder fündig geworden. Die Probleme liegen in der Klasse 2, beim Zusammenhang der Rechenarten. Die ganze Algebra lebt davon; Termumformungen erfolgen genau auf Basis dieser Zusammenhänge - das

Verständnis erspart das Auswendiglernen von Rechen„regeln“, von denen die SchülerInnen glauben, dass sie irgendwie vom „Himmel gefallen“ sind. Es lohnt sich ungemein, zu Beginn der Klasse 5 alle 4 Grundrechenarten GRÜNDLICH zu besprechen und deren Zusammenhang nochmals genau zu erläutern. Insbesondere Letzteres wird ganz oft extrem vernachlässigt zu Gunsten nicht verstandenen Regelwissens. Das rächt sich garantiert, was nur eine Frage der Zeit ist.

Man sollte es als Schule ständig wiederholen: Geben Sie dem Kind eine Rechenaufgabe und lassen Sie es dazu eine Rechengeschichte (Sach- bzw. Textaufgabe) erfinden. Da erlebt man nicht nur so manches Wunder, sondern sieht als LehrerIn auch, ob die Kinder die Rechenart begriffen haben. Nachfolgend eine Lösung (aus Klasse 5 Gymnasium):

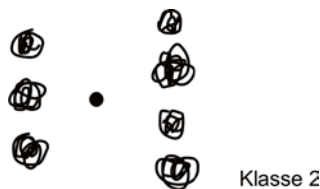
Marlon hat drei schwarze und vier rote Stifte auf dem Tisch gelegt.

Wie viele Stifte hat er?

$$3 \cdot 4 = 12$$

12 Stifte hat er insgesamt!

Auch sehr beliebt: „Male zur Aufgabe 3 mal 4 ein Bild!“



Das gibt dann jede Menge Probleme in den weiterführenden Klassen.

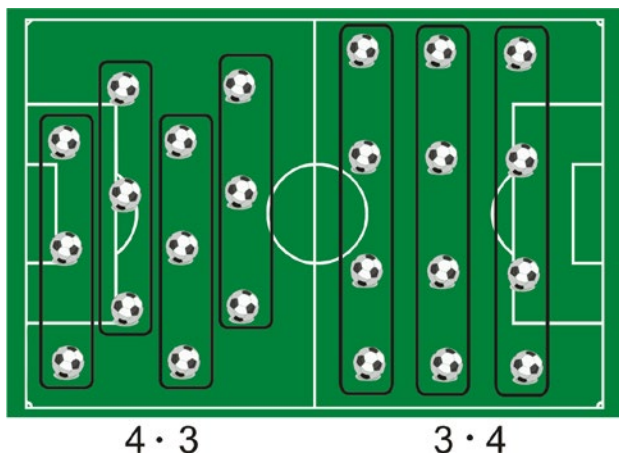
„ $6 \cdot 2$ ist das gleiche wie $2 \cdot 6$ “

Das stimmt keineswegs. Und auch Aussagen wie: „Das muss man nicht so eng sehen, schließlich kommt ja das gleiche raus!“ verdecken ganz schnell Verständnisprobleme beim Kind. Das Produkt 6 mal 2 besteht aus zwei Faktoren, die eine unterschiedliche Bedeutung haben: Faktor Nr. 1 gibt die Anzahl der Summanden an, Faktor Nr. 2 gibt an, welche Anzahl addiert wird.

Dementsprechend ist:

$$6 \cdot 2 = 2+2+2+2+2+2 \text{ Und: } 2 \cdot 6 = 6+6$$

Und das sind keine „Haarspaltereien“: Eine Mannschaftsaufstellung in 4 mal 3 sieht ganz anders aus als 3 mal 4:



Es gibt Beispiele aus der Physik, die dramatische Auswirkungen zeitigen, wenn die Faktoren vertauscht werden. Es ist aber völlig ausreichend, wenn sich bei den Kindern dadurch Schwierigkeiten bei Textaufgaben ergeben.

Die „Sache“ mit den Äpfeln und Birnen

„Du kannst doch nicht Äpfel und Birnen zusammenrechnen!“ Doch, das können unglaublich viele Kinder und Jugendliche und man sollte auf keinen Fall erstaunt sein, dass es ihnen auch gar nichts ausmacht.

Wir beginnen jetzt einmal in der Sekundarstufe I:

$$3a + 4b = \underline{7ab}$$

Hierzu gibt es gleich mehrere gut gemeinte Tipps: Der eine steht schon oben und ist mathematisch mit äußerster Vorsicht zu genießen, zumal man Äpfel und Birnen durchaus in einen Sack werfen kann. Der zweite Tipp kommt schon etwas anspruchsvoller daher: „Ungleichnamige Terme lassen sich nicht zusammenfassen (addieren bzw. subtrahieren).“ Den Grund bleibt man hier aber auch schuldig. Der letzte Tipp heißt: „Punkt- vor Strichrechnung, wegen der höheren Rechenart!“ Sieht schon eher nach einer Begründung aus, ist aber keine, weil die Hierarchie grundlos unterstellt wird. Wir nehmen uns die Aufgabe der SchülerIn einmal vor:

$$3a + 4b = 7ab$$

Ein wenig ausführlicher geschrieben:

$$3 \cdot a + 4 \cdot b = 7 \cdot ab$$

Aus dem Zusammenhang der Rechenarten ergibt sich:

$$a+a+a + b+b+b+b = ab+ab+ab+ab+ab+ab+ab$$

?

Tja, und was $a + b$ ist kann niemand sagen, denn weder die Zahl a noch die Zahl b ist bekannt. In jedem Fall ist die Gleichung

$$a + b = a \cdot b$$

völlig falsch: Dass die Summe aus a und b gleich dem Produkt aus a und b ist, ist nur dann der Fall, wenn a und b die Zahl Null sind. Für alle anderen Zahlen a und b sind alle Gleichungen falsch.

Aus dem Zusammenhang der Multiplikation und der Addition ergibt sich, dass man die Produkte $3a$ und $4b$ nicht zusammenfassen kann. Zeigen Sie das Ihren SchülerInnen! Und das ist was anderes als Äpfel und Birnen für den Zusammenhang der Rechenarten heranzuziehen.

Das Distributivgesetz - ebenfalls ein Verständnisproblem aus Klasse 2

$$a(b + c) = ab + ac$$

Das lernen die „Kleinen“ schon mit 7 bis 8 Jahren, wenn sie mit Hilfe der kurzen Reihen erste Multiplikationsaufgaben lösen. Jeder SekI-MathelehrerIn können wir bei entsprechenden Fehlern in der Algebra nur empfehlen, eine Mathe-Stunde aus der zweiten Klasse einzulegen. Auch hier ersetzt Regelwissen und auch Schematismus oft das Verständnis der Sache selbst: „Summen musst du beim Multiplizieren einklammern!“, „Hier musst du jedes mit jedem multiplizieren!“, lauten die Rechen„regeln“. So sieht das dann in den Mathe-Heften und auch in Mathebüchern aus - erklären tut das nichts!

$$a(b + c) = ab + ac$$

Als kurze Reihe bezeichnet man folgende Aufgaben aus dem kleinen 1×1 :

$$\begin{array}{cc} 1 \cdot \square & 5 \cdot \square \\ 2 \cdot \square & 10 \cdot \square \end{array}$$

Mit diesen Aufgaben, die ein Grundschüler zuerst lernen sollte, lassen sich alle anderen Produkte aufteilen und lösen. Und exakt das ist das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz). Beispielhaft führen wir es an der Aufgabe 6 mal 7 vor (was man auch keinem Gymnasiasten und Gesamtschüler vorenthalten sollte).

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ 6 \cdot 7 &= 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 \end{aligned}$$

Wir wenden auf die Produkte das Kommutativgesetz an:

$$7 \cdot 6 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1$$

Das sieht jetzt schon ziemlich gleich aus. Aus der Zahl 6 bilden wir jetzt die Summe $5+1$ und machen zunächst einen Fehler:

$$\underline{7 \cdot 5+1} = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1$$

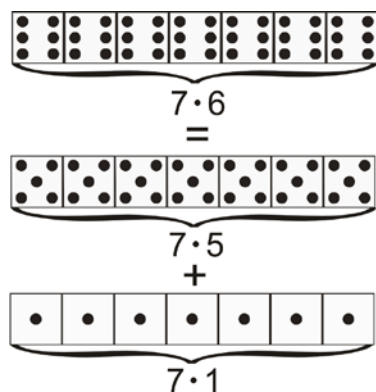
Denn:

$$7 \cdot 5+1 \neq 7 \cdot 6$$

Weil:

$$\underbrace{5+5+5+5+5+5+5+1}_{36} \neq \underbrace{6+6+6+6+6+6+6}_{42}$$

Das Verständnis wird durch den Zusammenhang der Rechenarten geschaffen: Wird die Summe 5+1 nicht geklammert, wird von der 6 nur die 5 mit 7 multipliziert. Dazu kann man auch eine erklärende Zeichnung hinzufügen (wirkt gelegentlich Wunder):

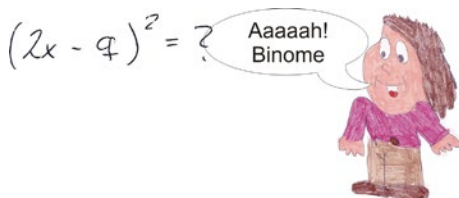


Die Grafik zeigt das Distributivgesetz gewissermaßen in Reinkultur. Sie ist aber auch die Erklärung dafür, dass man die Summe klammern muss, wenn man sie multipliziert, da man ansonsten nur einen Summanden vervielfacht:

Klasse 2 $7 \cdot (5 + 1) = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 1$

Klasse 7 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Das Distributivgesetz mal 2:



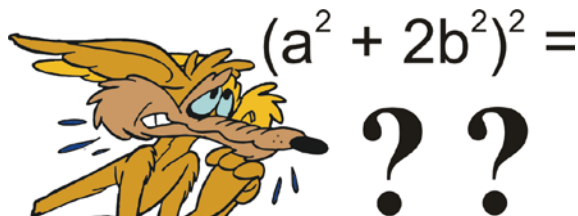
Bei Schülern äußerst unbeliebt, besonders dann, wenn alle grundlegenden Einsichten nicht vorhanden sind. Man löst die Binome dann nach Rezept, wie im Mathebuch zu sehen (Beispiel 1. Binom):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Sehr beliebt Kombinationsfehler:

$$\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2} = 0?$$

Verändert man die Aufgabe so, dass sie nicht mehr in das schematische Konzept passt, geht meist gar nichts mehr:



Dabei ist das Binom nichts anders als die zweifache Anwendung des Distributivgesetzes. Ein Beispiel an der Aufgabe 7 mal 7 (jeweils direkt darunter die algebraische Variante):

$$\begin{aligned} (5 + 2)^2 &= (5 + 2) \cdot (5 + 2) \\ (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= 5 \cdot (5 + 2) + 2 \cdot (5 + 2) \\ &= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) \\ &= 5 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= 5^2 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2^2 \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\ &= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 2^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Noch ein wenig Farbe und ein erhellendes Mengenbild hinzu und die Erklärung ist fertig

Sicher kann man die Aufgabe 7 mal 7 auch bedeutend einfacher lösen. Später brauchen die zukünftigen „Helden der Mathematik“ dieses Handwerkszeug, um aus Summen Produkte und umgekehrt aus Produkten Summen zu „basteln“ und damit für die Lösung von Gleichungen „höherer Natur“ zu sorgen.

Zudem wollten wir an dieser Stelle demonstrieren, dass die Algebra und die Grundschulmathematik der Klasse 2 ganz eng beieinander liegen, was zum einen der GrundschulkollegIn viel Genauigkeit bei der Einführung der Punktarten abverlangt (kommt meistens viel zu kurz) und der KollegIn aus dem SekI-Bereich verdeutlichen soll, dass man bei Problemen in der Algebra viel tiefer graben muss als erwartet.

Der Klassiker schlechthin:

$$5 + 3 \cdot 8 = 64?$$

Wir möchten jetzt nicht schon wieder gegen auswendig gelerntes Regelwerk etc. vorgehen, sondern liefern praktischen Anschauungsunterricht aus einer lerntherapeutischen Intervention (ob mit Zweitklässlern oder OberstufenschülerInnen ist völlig egal).

Schritt 1

Verfertigen Sie aus der Aufgabe eine Problemstellung. Die Schüler müssen lernen, dass es hier überhaupt etwas zu klären gibt.

$$5 + 3 \cdot 8 = 5 + 3 \cdot 8$$

Das sollte bei allen angekommen sein, dass das richtig ist und es hier nichts zu diskutieren gibt!

Schritt 2

Berechnen Sie jetzt die beiden Seiten der Gleichung unterschiedlich: Links beginnen Sie mit der Addition, rechts mit der Multiplikation:

$$\underbrace{5 + 3 \cdot 8}_{8 \cdot 8} = 5 + \underbrace{3 \cdot 8}_{24}$$

Schritt 3

Berechnen Sie nun links den Wert des Produkts und rechts den Wert der Summe:

$$\underbrace{5 + 3 \cdot 8}_{8 \cdot 8} = 5 + \underbrace{3 \cdot 8}_{24}$$
$$64 = 29$$

Schritt 4

Diskutieren Sie mit Ihren Schülern das Ergebnis. Bei den OberstufenschülerInnen sollte die Einsicht einigermaßen schnell heranreifen, dass eine der beiden Lösungen falsch sein muss. Versuchen Sie, dieses Problembewusstsein auch bei Ihren Grundschulern zu schaffen.

Schritt 5

Man muss sich also für eine Seite entscheiden. Fragt sich nur: Welche ist die richtige Lösung? Dazu bedient man sich wieder des Zusammenhangs der Rechenar-

ten (sofern installiert und verstanden) und verfertigt aus 3 mal 8 die entsprechende Summe:

$$5 + 3 \cdot 8 = 5 + 8 + 8 + 8$$

Schritt 6

Jetzt rechnet man den Wert der Summe auf der rechten Seite schrittweise aus:

$$\begin{aligned} 5 + 3 \cdot 8 &= 5 + 8 + 8 + 8 \\ &= 5 + \underbrace{24} \\ &= 29 \end{aligned}$$

Schritt 7

Jetzt kommt der schwierigste Teil - die Schlussfolgerung:

Hat man in einer Aufgabe zwei (oder mehrere) Rechenarten vor sich, werden zuerst die Punktrechnungen (also Multiplikation und Division, später die Potenzen) durchgeführt und dann erst die Strichrechnungen. Beachtet man das nicht, dann verweigert man sich der Einsicht aus dem Anfang des Artikels, dass jede Multiplikation eine fortgesetzte Addition der gleichen Anzahl ist (in diesem Fall der 8). Das ist also auf gar keinen Fall einfach so festgelegt oder in Mathe eine liebe Gewohnheit geworden usw. oder gar gottgefällig (vergl. Anfangsgraphik des Artikels)!

Der Zusammenhang der Rechenarten ist eigentlich Stoff der zweiten Klasse. Auf diese Zusammenhänge nur als unverstandenes Regelwerk Bezug zu nehmen, ist alles andere als ausreichend und sorgt deshalb für vielfältige Fehler. Man muss den SchülerInnen ständig klar machen, was hinter den Rechenarten steht, als Zusammenhang zur vorherigen, als inverse Rechenart und auch als Bedeutung auf der enaktiven Ebene.

Klar, gerade an letzteres denkt man dann kaum noch, wenn man mit dem Werkzeug der Algebra Gleichungen knackt. Aber die gesamte Algebra lebt von diesen Zusammenhängen – schwer ist sie wirklich nicht!

Die abgedruckten Beiträge stellen nicht unbedingt die Meinung der Redaktion dar.
Für die Inhalte sind jeweils die genannten Autoren verantwortlich.

Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.



Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:

Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie,
München, Brienner Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich),
Beate Lampke, München
Christian Bussebaum, Elke Focke, Düsseldorf;
Wolfgang Hoffmann, Dortmund; Katja Rochmann, Osnabrück
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

Die Kompetenzförderung Mathematik bietet



Ferienkurse für Mittelschüler, Realschüler und Gymnasiasten von Klasse 5 bis 10

Jeweils in den Oster-, Pfingst- und Sommerferien



Prüfungsvorbereitungskurse

- Qualifizierender Hauptschulabschluss

- M-Zweig
- Mittlere Reife
- Abitur

Jeweils ab dem 01.12.



Partner- und Einzelcoaching auch für die Oberstufe

- Immer **samstags und in den Schulferien nach Vereinbarung**. Auch in Physik.

Mathe-Institut Kompetenzförderung: Die Matheerklärer

Brienner Str. 48 • 80333 München

Tel.: 0180-300 16 99 • Fax: 089-52 34 283

Neue Therapieeinrichtung des Mathematischen Instituts in der Messestadt Riem



**Oslostr. 2
81829 München**

**Für Informationen und Termine
bitte anrufen: 089-5233142**

Therapieeinrichtungen des Mathematischen Instituts in der Umgebung

81245 Aubing,
Ubostraße 18, Tel. 0180 / 300 16 99*

86150 Augsburg,
Stettenstraße 2, Tel. 0180 / 300 16 99*

83671 Benediktbeuern,
Sommerkellerweg 15a, 0180 / 300 16 99*

85221 Dachau,
Dr.-Engert-Straße 9, Tel. 0180 / 300 16 99*

82211 Herrsching,
Siglstr. 7, 0180 / 300 16 99*

83607 Holzkirchen,
Haidstraße 3, Tel. 0180 / 300 16 99*

85551 Kirchheim,
Maria-Glasl-Straße 16, Tel. 0180 / 300 16 99*

86899 Landsberg,
Waldheimer Straße 2, Tel. 0180 / 300 16 99*

85521 Ottobrunn,
Putzbrunnerstraße 52, in AWO Nachbarschaftshilfe
0180 / 300 16 99*

93055 Regensburg,
In der Oberrn Au 12, Tel. 0180 / 300 16 99*

83022 Rosenheim,
Ruedorfferstraße 9, Tel. 0180 / 300 16 99*

82319 Starnberg,
Ferdinand-Maria-Straße 11, Tel. 0180 / 300 16 99*

82008 Unterhaching,
Robert-Koch-Straße 7, Tel. 089 / 52 33 142 oder
0180 / 300 16 99*

85716 Unterschleißheim,
VHS, Landshuter Str. 20–22, Tel. 0180 / 300 16 99*

*(9 Cent/Minute)



Pädagogische Fortbildung zum Thema:

„Was Fehler erzählen können...“

„Analyse des kindlichen Denkens
als erster Schritt zur Problemlösung.“

80539 München

Mittwoch, 13.03.2019 um 18 Uhr

Pädagogisches Institut, Herrnstr. 19 im Filmsaal9

86150 Augsburg

Donnerstag, 14.03.2019 um 19 Uhr

Zeughaus, Zeugplatz 4

83022 Rosenheim

Dienstag, 19.03.2019 um 19 Uhr

Bildungs- und Pfarrzentrum St. Nikolaus,
Pettenkoferstr. 5

Anmeldung erforderlich bei:

**MATHEMATISCHES INSTITUT ZUR BEHANDLUNG
DER RECHENSCHWÄCHE/DYSKALKULIE**



DIAGNOSE • BERATUNG • THERAPIE

Brienner Straße 48, 80333 München

Tel. 0180/300 16 99 oder 089/5 23 31 42

Fax 089 / 5 23 42 83

www.rechenschwaeche.de E-Mail: institut@rechenschwaeche.de

Telefonprechstunde: Mo – Fr 10.00 bis 14.30 Uhr



Spendenaufruf

Wer den Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V. mit Spenden bedenken will, dem sei herzlich gedankt, eine Spendenquittung (ab 20 EUR) zugesagt und versichert, dass dieses Geld in dieser Arbeit sicher gut angelegt ist.

IBAN: DE 44 7002 0270 1640 1759 38 ·
BIC: HYVEGDEMMXXX